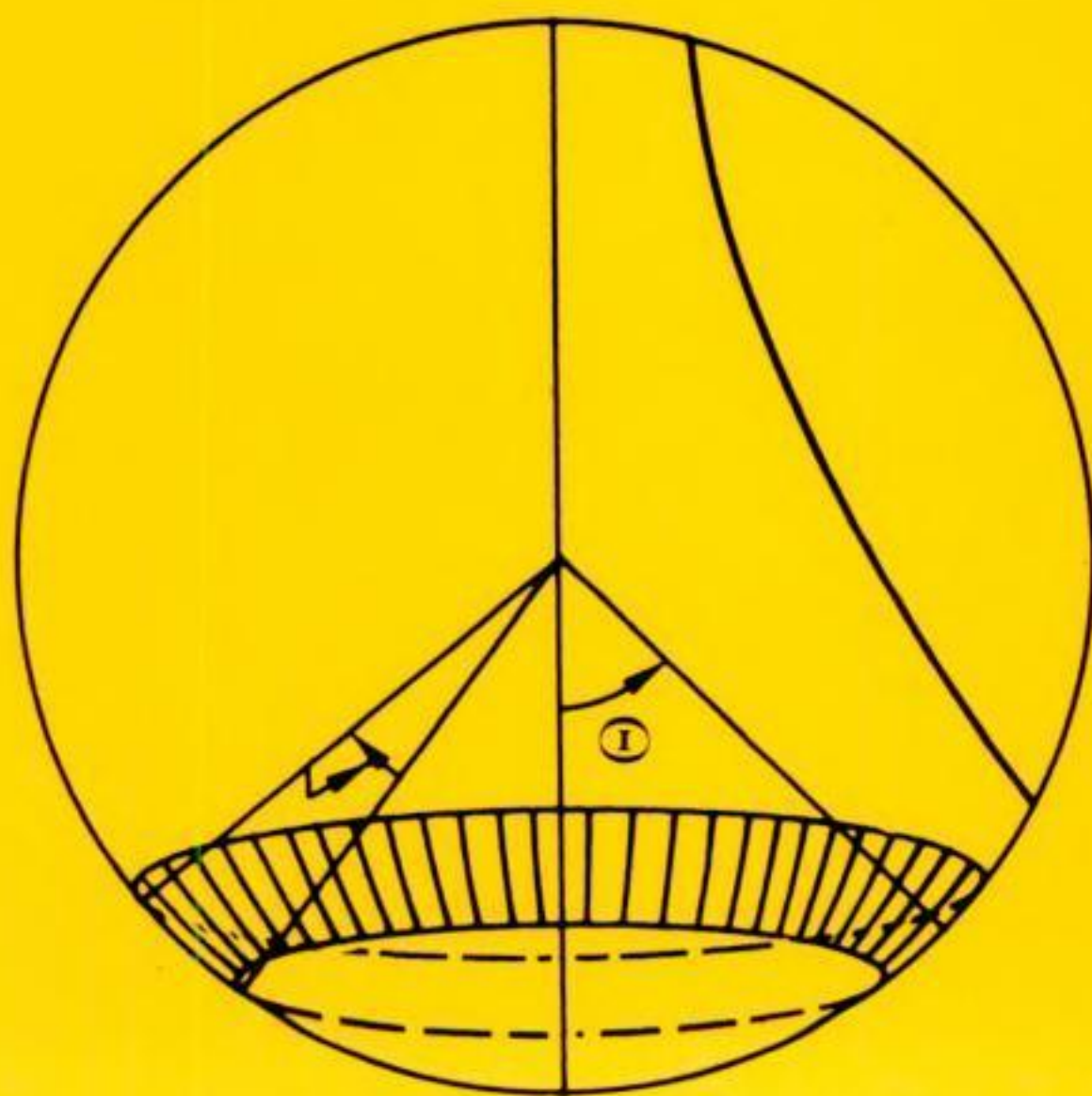


MECÁNICA CLÁSICA

H. Goldstein



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Copyrighted material

Título de la obra original:

Classical Mechanics, Second Edition

Edición original en lengua inglesa publicada por

Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, U.S.A.

Copyright © by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

“Esta obra es una traducción al español de CLASSICAL MECHANICS, SECOND EDITION, de Herbert Goldstein, publicada y vendida en todo el mundo en español por concesión de Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, EE.UU., que es la compañía propietaria de todos los derechos para publicar y vender la misma”.

Versión española por

Dr. Julián Fernández Ferrer

Catedrático de la Universidad Politécnica de Barcelona

Fellow of the Institute of Mathematics and its Applications

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15. Local B

08029 Barcelona. ESPAÑA

Tel: (34) 93 419 33 36

Fax: (34) 93 419 51 89

e-mail: reverte@reverte.com

www.reverte.com

REIMPRESIÓN: JUNIO DE 2006

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, queda rigurosamente prohibida, salvo excepción prevista en la ley. Asimismo queda prohibida la distribución de ejemplares mediante alquiler o préstamo públicos, la comunicación pública y la transformación de cualquier parte de esta publicación (incluido el diseño de la cubierta) sin la previa autorización de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Art. 270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto a los citados derechos.

Edición en español:

© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1987

ISBN: 84-291-4306-8

Depósito Legal: B-20519-2006

Impreso en España - Printed in Spain

Impreso por Domingraf Impressors

Mollet del Vallés (Barcelona)

Índice analítico

PRÓLOGO	v
CAPÍTULO 1 REPASO DE LOS PRINCIPIOS ELEMENTALES	1
1-1 Mecánica de una partícula	1
1-2 Mecánica de un sistema de partículas	6
1-3 Ligaduras	14
1-4 Principio de d'Alembert y ecuaciones de Lagrange	19
1-5 Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación	26
1-6 Aplicaciones sencillas de la formulación lagrangiana	30
CAPÍTULO 2 PRINCIPIOS VARIACIONALES Y ECUACIONES DE LAGRANGE	43
2-1 Principio de Hamilton	43
2-2 Algunas técnicas del cálculo de variaciones	45
2-3 Deducción de las ecuaciones de Lagrange a partir del principio de Hamilton	53
2-4 Extensión del principio de Hamilton a sistemas no holonomos	56
2-5 Ventajas de una formulación de principio variacional	63
2-6 Teoremas de conservación y propiedades de simetría	66
CAPÍTULO 3 PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS	85
3-1 Reducción al problema equivalente de un cuerpo	85
3-2 Ecuaciones del movimiento e integrales primeras	87
3-3 Problema unidimensional equivalente y clasificación de órbitas	92
3-4 Teorema del virial	101

3-5	Ecuación diferencial de la órbita y potenciales de fuerza integrables ...	105
3-6	Condiciones para órbitas cerradas (teorema Bertrand)	112
3-7	Problema de Kepler: Fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia	116
3-8	Movimiento en el tiempo en el problema de Kepler	122
3-9	Vector de Laplace-Runge-Lenz	128
3-10	Dispersión en un campo de fuerzas central	132
3-11	Transformación del problema de la dispersión a coordenadas del laboratorio	143

CAPÍTULO 4 CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO 161

4-1	Coordenadas independientes para un cuerpo rígido	161
4-2	Transformaciones ortogonales	167
4-3	Propiedades formales de la matriz de cambio	173
4-4	Ángulos de Euler	183
4-5	Parámetros Cayley-Klein y cantidades relacionadas con ellos	188
4-6	Teorema de Euler referente al movimiento del cuerpo rígido	202
4-7	Rotaciones finitas	209
4-8	Rotaciones infinitesimales	213
4-9	Velocidad de variación de un vector	222
4-10	Fuerza de Coriolis	226

CAPÍTULO 5 ECUACIONES DE MOVIMIENTO DEL CUERPO RÍGIDO 239

5-1	Momento cinético y energía cinética del movimiento alrededor de un punto	239
5-2	Tensores y afinores	244
5-3	Tensor de inercia y momento de inercia	248
5-4	Valores propios del tensor de inercia y transformación a los ejes principales	252
5-5	Métodos de solución de problemas de cuerpo rígidos y ecuaciones de Euler del movimiento	259
5-6	Movimiento de un cuerpo rígido exento de momentos	261
5-7	Peonza simétrica pesada con un punto fijo	270
5-8	Precesión de los equinoccios y de las órbitas de satélites	285
5-9	Precesión de sistemas de cargas en un campo magnético	293

CAPÍTULO 6 OSCILACIONES PEQUEÑAS 305

6-1	Formulación del problema	305
6-2	Ecuación de valores propios y transformación a los ejes principales ...	308
6-3	Frecuencias de vibración libre y coordenadas normales	317

6-4	Vibraciones libres de una molécula triatómica lineal	323
6-5	Vibraciones forzadas y efecto de las fuerzas disipativas	328

CAPÍTULO 7 LA TEORÍA RESTRINGIDA DE LA RELATIVIDAD EN MECÁNICA CLÁSICA 341

7-1	Programa básico de la relatividad restringida	342
7-2	Transformación de Lorentz	344
7-3	Transformaciones de Lorentz en espacios reales de cuatro dimensiones ...	356
7-4	Otras descripciones de la transformación de Lorentz	361
7-5	Formulaciones covariantes en cuatro dimensiones	367
7-6	Las ecuaciones de la fuerza y la energía en mecánica relativista	373
7-7	Cinemática relativista de las colisiones y de sistemas de muchas partículas	380
7-8	Formulación lagrangiana de la mecánica relativista	394
7-9	Formulaciones lagrangianas covariantes	401

CAPÍTULO 8 ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE HAMILTON 417

8-1	Transformaciones de Legendre y ecuaciones de movimiento de Hamilton	417
8-2	Coordenadas cíclicas y teoremas de conservación	427
8-3	Método de Routh y oscilaciones en torno al movimiento estacionario	431
8-4	Formulación de Hamilton de la mecánica relativista	437
8-5	Deducción de las ecuaciones de Hamilton a partir de un principio variacional	443
8-6	Principio de mínima acción	446

CAPÍTULO 9 TRANSFORMACIONES CANÓNICAS 461

9-1	Ecuaciones de la transformación canónica	461
9-2	Ejemplos de transformaciones canónicas	470
9-3	Método simpléctico para transformaciones canónicas	476
9-4	Corchetes de Poisson y otros invariantes canónicos	484
9-5	Ecuaciones de movimiento. Transformaciones canónicas infinitesimales y teoremas de conservación con la formulación de los corchetes de Poisson	494
9-6	Relaciones del corchete de Poisson momento cinético	507
9-7	Grupos de simetría de sistemas mecánicos	511
9-8	Teorema de Liouville	518

CAPÍTULO 10	TEOREMA DE HAMILTON-JACOBI	533
10-1	Ecuación de Hamilton-Jacobi para la función principal de Hamilton	533
10-2	El problema del oscilador armónico como ejemplo del método de Hamilton-Jacobi	538
10-3	Ecuación de Hamilton-Jacobi para la función característica de Hamilton	541
10-4	Separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi	546
10-5	Variables acción-ángulo en sistemas de un grado de libertad	556
10-6	Variables acción-ángulo para sistemas totalmente separables	562
10-7	Problema de Kepler tratado con variables acción ángulo	572
10-8	Teoría de Hamilton-Jacobi. Óptica geométrica y Mecánica ondulatoria	588
CAPÍTULO 11	TEORÍA CANÓNICA DE LA PERTURBACIÓN	605
11-1	Introducción	605
11-2	Perturbación dependiente del tiempo (variación de constantes)	606
11-3	Ejemplos de la teoría de la perturbación dependiente del tiempo	614
11-4	Teoría de la perturbación independiente del tiempo en primer orden con un grado de libertad	624
11-5	Teoría de la perturbación independiente del tiempo para un orden superior al primero	630
11-6	Técnicas de perturbación especializadas para mecánica celeste y mecánica espacial	639
11-7	Invariantes adiabáticos	642
CAPÍTULO 12	INTRODUCCIÓN A LAS FORMULACIONES DE LAGRANGE Y HAMILTON PARA SISTEMAS CONTINUOS Y CAMPOS	659
12-1	Transición de un sistema discreto a un sistema continuo	659
12-2	Formulación de Lagrange para sistemas continuos	663
12-3	Tensor esfuerzo-energía y teoremas de conservación	671
12-4	Formulación de Hamilton, corchetes de Poisson y representación por cantidad de movimiento	679
12-5	Teoría de campos relativista	691
12-6	Ejemplos de teorías de campo relativista	696
12-7	Teorema de Noether	712

APÉNDICES	729
A Demostración del teorema de Bertrand	729
B Los ángulos de Euler en otros convenios	735
C Propiedades de transformación de $d\Omega$	741
D Condiciones de Staeckel para la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi	745
E Formulación lagrangiana del campo acústico en los gases	749
BIBLIOGRAFÍA	755
ÍNDICE DE SÍMBOLOS	765
ÍNDICE ALFABÉTICO	779



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

La *cantidad de movimiento* \mathbf{p} de la partícula es, por definición, el producto de su masa por su velocidad:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (1-2)$$

A consecuencia de interacciones con campos y objetos exteriores, la partícula puede experimentar fuerzas de diversos tipos, p. ej., gravitatorias o electrodinámicas; la suma vectorial de las fuerzas que se ejercen sobre la partícula es la fuerza resultante \mathbf{F} . La Mecánica de la partícula está regida por la *Segunda Ley de Newton del Movimiento*, la cual establece que existen sistemas de referencia en los cuales el movimiento de la partícula está descrito por la ecuación diferencial

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (1-3)$$

o sea

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (1-4)$$

En la mayoría de los casos, la masa de la partícula es constante y la ecuación (1-3) se reduce a

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}, \quad (1-5)$$

donde \mathbf{a} es el vector aceleración de la partícula definido por

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1-6)$$

La ecuación del movimiento es, pues, una ecuación diferencial de segundo orden, suponiendo que \mathbf{F} no dependa de derivadas de orden superior.

Todo sistema de referencia en el cual sea válida la ecuación (1-3) se denomina *sistema inercial* o *de Galileo*. Incluso en Mecánica clásica, la noción de sistema inercial es una idealización. Sin embargo, en la práctica suele ser posible establecer un sistema de coordenadas que se aproxime cuanto queramos a las propiedades deseadas. Para muchos fines, un sistema de referencia solidario a la Tierra (el «sistema del laboratorio») constituye una aproximación suficiente a un sistema inercial, mientras que para ciertos fines astronómicos puede ser necesario construir un sistema inercial por referencia a las galaxias más lejanas.

Muchas conclusiones importantes de la Mecánica se pueden expresar en forma de

teoremas de conservación que indican en qué condiciones se mantienen constantes en el tiempo diversas magnitudes mecánicas. La ecuación (1-1) nos da directamente el primero de ellos, el

Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de una partícula: Si la fuerza resultante, \mathbf{F} , es nula, será $\dot{\mathbf{p}} = 0$ y se conservará la cantidad de movimiento \mathbf{p} .

El momento cinético de la partícula respecto a un punto O se representa por \mathbf{L} y es, por definición,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (1-7)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición que va de O a la partícula. Observemos que el orden de los factores es importante. Definimos ahora el *momento de una fuerza respecto a un punto O* en la forma

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1-8)$$

La ecuación análoga a la (1-3) para \mathbf{N} se obtiene formando el producto vectorial de \mathbf{r} por la ecuación (1-4):

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (1-9)$$

La ecuación (1-9) se puede escribir de otra forma, utilizando la identidad vectorial:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (1-10)$$

en donde, evidentemente, se anula el primer término del segundo miembro. A consecuencia de esta identidad, la ecuación (1-9) toma la forma

$$\mathbf{N} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (1-11)$$

Notemos que tanto \mathbf{N} como \mathbf{L} dependen del punto O respecto al cual se toman los momentos.

Al igual que sucedía con la ecuación (1-3), la ecuación (1-11) para el momento da

también un teorema de conservación inmediato que es esta vez el

Teorema de conservación del momento cinético de una partícula: Si el momento resultante \mathbf{N} es nulo, será $\dot{\mathbf{L}} = 0$, y se conserva el momento cinético.

Consideremos ahora el trabajo efectuado por la fuerza exterior \mathbf{F} sobre la partícula cuando ésta va del punto 1 al punto 2. Por definición, este trabajo es

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (1-12)$$

Si la masa es constante (como supondremos de ahora en adelante, a menos que se especifique lo contrario), la integral de la ecuación (1-12) se reduce a

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt} (v^2) dt,$$

y por tanto

$$W_{12} = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2). \quad (1-13)$$

La magnitud escalar $mv^2/2$ es la llamada energía cinética de la partícula y se representa por T , con lo que el trabajo efectuado es igual a la variación de energía cinética:

$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (1-14)$$

Cuando el campo de fuerzas sea tal que el trabajo W_{12} sea el mismo para todo camino posible que una los puntos 1 y 2, diremos que la fuerza (y el sistema) es *conservativa*. Otra descripción de sistema conservativo se obtiene imaginando que se lleva la partícula del punto 1 al punto 2 por un camino posible y luego regresa al punto 1 por otro camino. La independencia de W_{12} del camino particular seguido implica que el trabajo efectuado a lo largo del circuito cerrado mencionado sea nulo, es decir:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (1-15)$$

Desde un punto de vista físico, queda claro que un sistema no podrá ser conservativo

cuando existan en él rozamientos u otras fuerzas disipativas, porque el producto $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ debido al rozamiento es siempre negativo y no podrá anularse la integral.

Según un conocido teorema de Análisis vectorial,* para que W_{12} sea independiente del camino físico seguido por la partícula es condición necesaria y suficiente que \mathbf{F} sea el gradiente de una cierta función escalar de la posición:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (1-16)$$

donde V recibe el nombre de *potencial*, o *energía potencial*. La existencia de V puede inferirse intuitivamente mediante un razonamiento sencillo. Si W_{12} es independiente del camino de integración entre los extremos 1 y 2, se podría considerar que W_{12} es la variación de una magnitud que sólo depende de la posición de los puntos extremos. Esta magnitud la podemos representar por $-V$, con lo que para un elemento de camino tendremos la relación

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -dV$$

o sea

$$F_s = -\frac{\partial V}{\partial s},$$

que es equivalente a la ecuación (1-16). Observemos que, en la ecuación 1-16, podemos sumar a V una cantidad cualquiera constante en el espacio, sin que quede afectado el resultado. Por tanto, *el nivel cero de V es arbitrario*.

En el caso de un sistema conservativo, el trabajo efectuado por las fuerzas es

$$W_{12} = V_1 - V_2. \quad (1-17)$$

Combinando la ecuación (1-17) con la (1-14) tenemos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2, \quad (1-18)$$

* Véase, p. ej., W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2.^a ed. (Reading Massachusetts: Addison-Wesley, 1973), p. 311, p. 347.

que expresa en símbolos el

Teorema de conservación de la energía de una partícula: Si las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, se conservará la energía total $T + V$ de la partícula.

La fuerza aplicada a una partícula puede venir dada, en determinadas circunstancias, por el gradiente de una función escalar que dependa explícitamente de la posición de la partícula y del tiempo. No obstante, el trabajo efectuado sobre la partícula cuando recorre una distancia ds ,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial V}{\partial s} ds,$$

ya no será la variación total de $-V$ durante el corrimiento, puesto que V también varía explícitamente con el tiempo al moverse la partícula. Luego el trabajo efectuado cuando la partícula va del punto 1 al punto 2 ya no será la diferencia entre los valores de la función V en dichos puntos. Aun cuando podamos definir una energía total $T + V$, no se conserva en el curso del movimiento de la partícula.

1-2 MECÁNICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Al generalizar a sistemas de muchas partículas las ideas del apartado anterior, deberemos distinguir entre *fuerzas exteriores* que se ejercen sobre las partículas por parte de fuentes de fuera del sistema y *fuerzas interiores* sobre, p. ej., la partícula i debidas a las demás partículas del sistema. Así, la ecuación del movimiento (Segunda ley de Newton) para la partícula i -ésima se escribirá

$$\sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (1-19)$$

donde $\mathbf{F}_i^{(e)}$ representa la fuerza exterior y \mathbf{F}_{ji} es la fuerza interior que la partícula j -ésima ejerce sobre la partícula i -ésima (naturalmente, \mathbf{F}_{ii} es nula). Supondremos que \mathbf{F}_{ji} (como $\mathbf{F}_i^{(e)}$) cumplen la tercera ley de Newton del movimiento en su forma original: que las fuerzas que se ejercen entre sí dos partículas son iguales y opuestas. Esta hipótesis (que no es válida para todos los tipos de fuerzas) se denomina a veces *ley débil de acción y reacción*.

Sumando las ecuaciones (1-19) para todas las partículas, se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji}. \quad (1-20)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

La derivada temporal del momento cinético resultante es, pues, igual al momento resultante de las fuerzas exteriores respecto al punto dado. A la ecuación (1-26) corresponde el

Teorema de conservación del momento cinético resultante: \mathbf{L} será constante en el tiempo cuando el momento resultante aplicado (de las fuerzas exteriores) sea nulo.

(Quizá valga la pena recalcar que se trata de un teorema *vectorial*, es decir, L_z se conservará si es nulo $N_x^{(e)}$, aun cuando no lo sean $N_x^{(e)}$ y $N_y^{(e)}$.)

Notemos que la conservación de la cantidad de movimiento en ausencia de fuerzas aplicadas supone que la ley débil de acción y reacción es válida para las fuerzas interiores. La conservación del momento cinético resultante del sistema en ausencia de pares aplicados exige la validez de la ley fuerte de acción y reacción —que las fuerzas interiores sean, además, *centrales*. Muchas fuerzas físicas conocidas, tales como las de la gravedad, satisfacen la ley fuerte. Pero se pueden encontrar fuerzas para las cuales acción y reacción son iguales aun cuando las fuerzas no sean centrales (v. más adelante). En un sistema en el cual haya cargas en movimiento, las fuerzas entre cargas predichas por la ley de Biot-Savart pueden vulnerar las dos formas de la ley de acción y reacción.* En tales

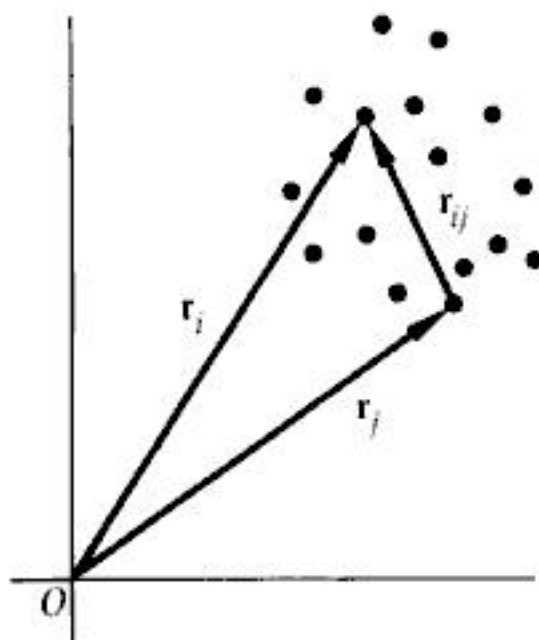


FIGURA 1-2

El vector \mathbf{r}_{ij} entre las partículas i -ésima y j -ésima.

casos no son aplicables las ecuaciones (1-23) y (1-26) y sus correspondientes teoremas de conservación, al menos en la forma que los hemos dado. Usualmente será posible hallar

* Si dos cargas se mueven uniformemente con vectores velocidad paralelos que no sean perpendiculares a la recta que une las cargas, las fuerzas mutuas serán iguales y opuestas pero no estarán soportadas por el vector entre las cargas. Consideremos, además, dos cargas que se muevan (instantáneamente) de manera que una se dirija hacia la otra la cual, a su vez, se mueve perpendicularmente a la primera. Entonces, la segunda ejerce sobre la primera una fuerza no nula, sin experimentar fuerza de reacción alguna.

alguna generalización de \mathbf{P} o \mathbf{L} que se conserve. Así, en un sistema aislado de cargas en movimiento, lo que se conserva es la suma del momento cinético mecánico y el «momento cinético» electromagnético del campo.

La ecuación (1-23) dice que la cantidad de movimiento resultante del sistema es la misma que se tendría si se concentrara toda la masa del sistema en el centro de masa y se moviera con éste. El teorema análogo para el momento cinético es más complicado. Con el origen O como punto de referencia, el momento cinético resultante del sistema es

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

Sea \mathbf{R} el vector de posición del centro de masa respecto a O y sea \mathbf{r}'_i el vector de posición de la partícula i -ésima respecto al centro de masa. Tendremos entonces (v. fig. 1-3)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \quad (1-27)$$

y

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v},$$

donde

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

es la velocidad del centro de masa relativa a O y

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

es la velocidad de la partícula i -ésima relativa al centro de masa del sistema. Utilizando la ecuación (1-27), el momento cinético resultante toma la forma

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{v} + \mathbf{R} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}'_i.$$

Los dos últimos términos de esta expresión son nulos, ya que ambos contienen el factor $\sum m_i \mathbf{r}'_i$, el cual define el vector de posición del centro de masa, precisamente en el sistema de coordenadas cuyo origen es el centro de masa, por lo que será un vector nulo.

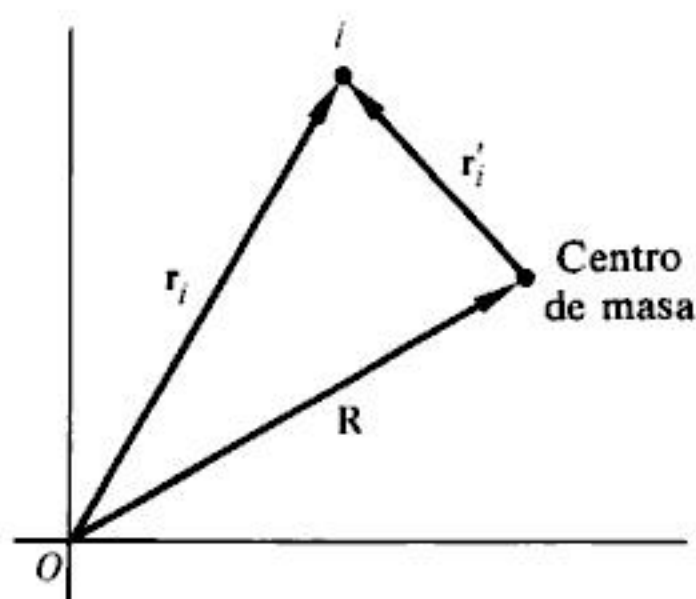


FIGURA 1-3

Vectores que intervienen en el cambio de punto de referencia para el momento cinético.

Escribiendo los demás términos en forma adecuada, el momento cinético resultante respecto a O resulta ser

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i. \quad (1-28)$$

La ecuación (1-28) nos dice que el momento cinético resultante respecto a un punto O es igual al momento cinético del sistema concentrado en su centro de masa, más el momento cinético del movimiento alrededor del centro de masa. La forma de la ecuación (1-28) hace resaltar que, en general, \mathbf{L} depende del origen O a través del vector \mathbf{R} . Solamente si el centro de masa está en reposo respecto a O será el momento cinético independiente del punto de referencia. En este caso es nulo el primer término de (1-28) y \mathbf{L} se reduce siempre al momento cinético tomado respecto al centro de masa.

Por último, consideremos la ecuación de la energía. Al igual que en el caso de la partícula, calculamos el trabajo efectuado por todas las fuerzas al mover el sistema de una configuración inicial 1 a una configuración final 2:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{s}_i. \quad (1-29)$$

De nuevo podemos utilizar las ecuaciones del movimiento para reducir las integrales a

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \int_1^2 d(\tfrac{1}{2} m_i v_i^2).$$

Luego, el trabajo efectuado sigue pudiéndose escribir en forma de diferencia entre las energías cinéticas final e inicial:

$$W_{12} = T_2 - T_1,$$

donde T , energía cinética total del sistema, es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \quad (1-30)$$

Utilizando las transformaciones a las coordenadas del centro de masa, dadas en la ecuación (1-27), también podremos escribir T en la forma

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right), \end{aligned}$$

y por la misma razón empleada al calcular el momento cinético, el último término es nulo y queda

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2. \quad (1-31)$$

La energía cinética, al igual que el momento cinético, consta de dos partes: la energía cinética que se obtiene considerando toda la masa concentrada en el centro de masa, más la energía cinética del movimiento alrededor del centro de masa.

Consideremos ahora el segundo miembro de la ecuación (1-29). En el caso particular de que las fuerzas exteriores deriven de un potencial, el primer término lo podremos escribir en la forma

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i \int_1^2 \nabla_i V_i \cdot d\mathbf{s}_i = - \sum_i V_i \Big|_1^2,$$

donde el subíndice i del operador indica que las derivadas se calculan respecto a las componentes de \mathbf{r}_i . Si las fuerzas interiores son también conservativas, las fuerzas mutuas entre las partículas i -ésima y j -ésima, \mathbf{F}_{ij} y \mathbf{F}_{ji} , podrán obtenerse a partir de una función



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

El trabajo total debido a las fuerzas interiores se reduce entonces a

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} \Big|_1^2. \quad (1-35)$$

El factor $1/2$ aparece en la ecuación (1-35) porque al sumar para *ambos* índices i y j , cada miembro de un par dado se incluye dos veces, primero en la suma para i y luego en la suma para j .

De estas consideraciones, queda claro que si las fuerzas exteriores e interiores derivan ambas de potenciales, se puede definir una *energía potencial total*, V del sistema,

$$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}, \quad (1-36)$$

tal que se conserva la energía total $T + V$. Este teorema es el análogo del de conservación (1-17) para una sola partícula.

Al segundo término del segundo miembro de la ecuación (1-36) se le llama energía potencial interna del sistema. En general, no tiene por qué ser nulo y, lo que es más importante, puede variar cuando el sistema varía con el tiempo. Solamente en la clase particular de sistemas llamada *cuerpos rígidos* será siempre constante el potencial interno. Formalmente, podemos definir el cuerpo rígido diciendo que es un sistema de partículas en el cual las distancias r_{ij} son fijas y no pueden variar con el tiempo. En tal caso, los vectores $d\mathbf{r}_{ij}$ sólo podrán ser perpendiculares a las \mathbf{r}_{ij} correspondientes y por tanto, a las \mathbf{F}_{ij} . Así pues, en un cuerpo rígido las *fuerzas interiores no trabajan* y el potencial interno debe mantenerse constante. Como, en todo caso, el potencial total está definido salvo una constante aditiva, al estudiar el movimiento del sistema podremos prescindir por completo del potencial interno si es invariable.

1-3 LIGADURAS

En los apartados anteriores podríamos haber sacado la impresión de que todos los problemas de la Mecánica se reducen a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (1-19):

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}.$$

Simplemente, se sustituyen las distintas fuerzas que se ejercen sobre las partículas del sistema, se da vueltas a la manivela matemática y salen las respuestas como si fuera café



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

al movimiento de la cuenta, la dependencia temporal de la ligadura entra en la ecuación de la ligadura solamente a través de las coordenadas del alambre curvo (que ahora son parte del sistema de coordenadas). La ligadura global será, entonces, esclerónoma.*

Las ligaduras introducen dos tipos de dificultades en la solución de los problemas mecánicos. Primero, las coordenadas r_i ya no son todas independientes puesto que están relacionadas por las ecuaciones de ligadura; luego las ecuaciones del movimiento (1-19) no serán todas independientes. Segundo, las fuerzas de ligadura, p. ej., la fuerza que el alambre ejerce sobre la cuenta (o la pared sobre la partícula gaseosa) no se da a priori. Se cuenta entre las incógnitas del problema y debe obtenerse de la solución que buscamos. En verdad, imponer ligaduras al sistema no es más que otro método de establecer que hay fuerzas presentes en el problema las cuales no se pueden especificar directamente sino que se conocen en función de su efecto sobre el movimiento del sistema.

En el caso de ligaduras holonomas, la primera dificultad se resuelve introduciendo *coordenadas generalizadas*. Hasta ahora hemos estado pensando implícitamente en coordenadas cartesianas. Un sistema de N partículas, exento de ligaduras, tiene $3N$ coordenadas independientes o *grados de libertad*. Si existen ligaduras holonomas, expresadas por k ecuaciones de la forma (1-37), podremos utilizar éstas para eliminar k de las $3N$ coordenadas y nos quedarán $3N - k$ coordenadas independientes y diremos que el sistema posee $3N - k$ grados de libertad. Esta eliminación de las coordenadas dependientes se puede expresar de otra manera, introduciendo $3N - k$ variables independientes nuevas $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$ en función de las cuales, las antiguas coordenadas r_1, r_2, \dots, r_N se expresarán mediante ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \end{aligned} \tag{1-38}$$

que contienen implícitamente las ligaduras. Estas son ecuaciones de *transformación* del sistema de variables (\mathbf{r}_i) al sistema de las (q_i) , o bien podemos considerar que las ecuaciones (1-38) son representaciones paramétricas de las variables (\mathbf{r}_i) . Se supone siempre que también podemos pasar del sistema (q_i) al sistema (\mathbf{r}_i) , es decir, que las ecuaciones (1-38) combinadas con las k ecuaciones de ligadura se pueden invertir para obtener cualquier q_i en función de la variable (\mathbf{r}_i) y el tiempo.

Las coordenadas generalizadas, q_i , a diferencia de las cartesianas, no suelen dividirse

* La terminología de las ligaduras puede ser muy elaborada (cfr. Kilmister y Reeve, *Rational Mechanics*, New York, American Elsevier, 1966). De cierta utilidad es la distinción entre ligaduras *bilaterales*, en las que las ecuaciones de ligadura son igualdades, y *unilaterales*, que contienen desigualdades. Esta nomenclatura deriva del ejemplo de movimiento ligado relativo a una superficie. En la ligadura bilateral del movimiento sobre una superficie, la fuerza de ligadura puede tener uno y otro sentido según la normal a la superficie. Una partícula que se mueva sobre la superficie de la esfera o por su exterior, está sometida a una ligadura unilateral en la cual toda fuerza de ligadura actúa solamente en el sentido de la normal hacia el exterior.

en grupos convenientes de tres que puedan agruparse para formar vectores. Así, en el caso de una partícula obligada a moverse *sobre* la superficie de una esfera, los dos ángulos que expresan la posición sobre la esfera, p. ej., longitud y latitud, serán coordenadas generalizadas posibles. O bien, en el ejemplo del péndulo doble que se mueven en un punto (dos partículas unidas por una varilla rígida inextensible y suspendidas por otra varilla análoga sujeta a una de las partículas), los dos ángulos θ_1 y θ_2 (cfr. fig. 1-4) constituyen coordenadas generalizadas satisfactorias. Las coordenadas generalizadas, en el sentido de coordenadas distintas de las cartesianas, suelen ser útiles en sistemas sin ligaduras. Así, en el problema de la partícula que se mueve en un campo de fuerzas centrales exterior ($V = V(r)$) no hay ligadura pero es evidentemente más conveniente utilizar coordenadas polares esféricas que coordenadas cartesianas. Sin embargo, no debemos pensar en las coordenadas generalizadas en función de coordenadas de posición ortogonales. Se puede fijar cualquier tipo de magnitudes para servir de coordenadas generalizadas. Así, las amplitudes de un desarrollo en serie de Fourier de r , pueden utilizarse como coordenadas generalizadas, o podemos encontrar conveniente emplear cantidades con las dimensiones de una energía o de un momento cinético.

Si la ligadura es no holonoma, no se podrán utilizar las ecuaciones que expresan la ligadura para eliminar las coordenadas dependientes. Un ejemplo corriente de ligadura no holonoma es el de un cuerpo que rueda sin deslizar sobre una superficie rugosa. Las coordenadas que se utilizan para describir el sistema incluirán, por lo general, coordenadas angulares que especifiquen la orientación del cuerpo, más un conjunto de coordenadas que describan la posición del punto de contacto sobre la superficie. La ligadura de «rodadura» relaciona estos dos sistemas de coordenadas; no son independientes. Un cambio de posición del punto de contacto significa inevitablemente un cambio de su orientación. Aún así, no podemos reducir el número de coordenadas, ya que la condición «rodadura» no puede expresarse en forma de ecuación entre las coordenadas, en la forma (1-37). Es más bien una condición sobre las *velocidades* (es decir, el punto de contacto está quieto), condición diferencial que puede darse en forma integral sólo *después* de haber resuelto el problema.

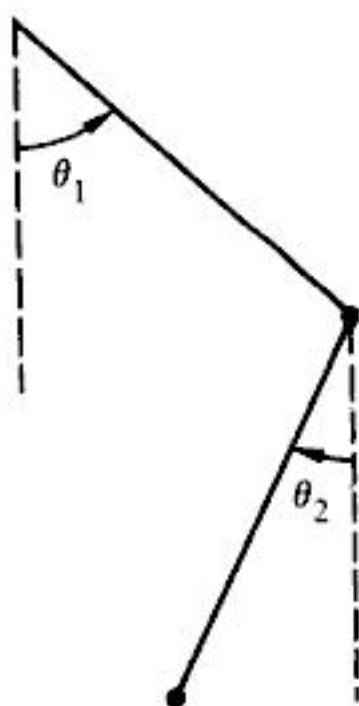


FIGURA 1-4
Péndulo doble.

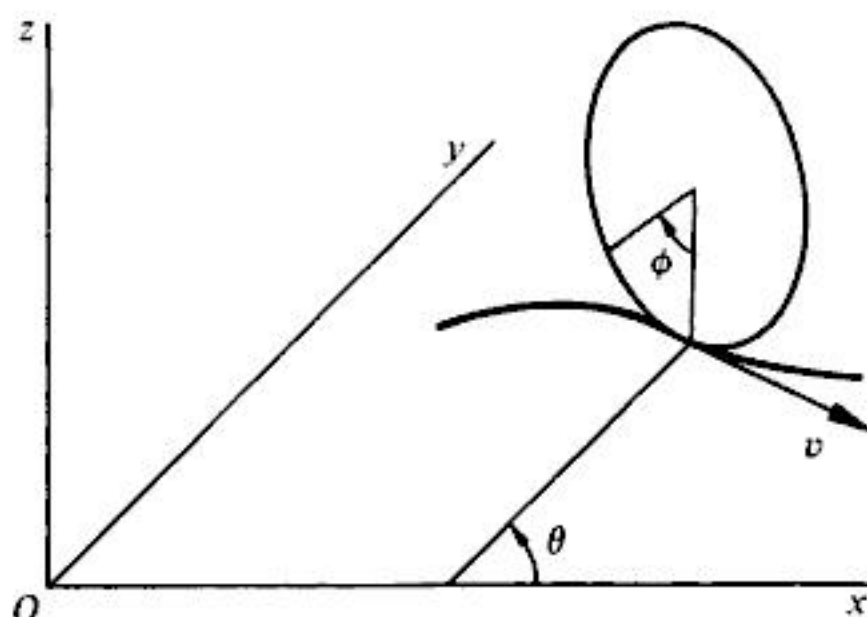


FIGURA 1-5

Disco vertical que rueda sobre un plano horizontal.

Vamos a ilustrar este caso de manera sencilla. Consideremos un disco que rueda sobre el plano horizontal xy obligado a moverse de manera que el plano del disco sea siempre vertical. Las coordenadas utilizadas para describir el movimiento podrían ser las coordenadas x, y del centro del disco, un ángulo de rotación ϕ en torno al eje del disco y el ángulo θ que forma el eje del disco con, p. ej., el eje x (cfr. fig. 1-5). A consecuencia de la ligadura, la velocidad del centro del disco, v , tendrá una magnitud proporcional a ϕ ,

$$v = a\dot{\phi},$$

donde a es el radio del disco y su dirección es perpendicular al eje del mismo:

$$\dot{x} = v \sin \theta,$$

$$\dot{y} = -v \cos \theta.$$

Combinando estas condiciones, tenemos dos ecuaciones *diferenciales* de ligadura:

$$\begin{aligned} dx - a \sin \theta d\phi &= 0, \\ dy + a \cos \theta d\phi &= 0. \end{aligned} \quad (1-39)$$

Ninguna de las ecuaciones (1-39) puede integrarse sin haber resuelto, de hecho, el problema; es decir, no se puede hallar un factor integrante $f(x, y, \theta, \phi)$ que convierta una u otra de las ecuaciones en diferenciales exactas (cfr. Ejercicio 7).^{*} Luego las ligaduras no

^{*} En principio, siempre se puede encontrar un factor integrante para una ecuación diferencial de primer orden de ligadura en sistemas que sólo contengan dos coordenadas (cfr. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2.^a ed., p. 531) y dichas ligaduras serán, por tanto, holonomas. Ejemplo conocido lo constituye el movimiento bidimensional de un círculo que rueda por un plano inclinado.

pueden reducirse a la forma de la ecuación (1-37) y por tanto son no holonomas. Podemos ver, físicamente, que no puede haber relación funcional directa entre ϕ y las demás coordenadas x , y y θ observando que en todo punto de su camino se puede hacer rodar el disco alrededor de un círculo tangente al camino y de radio arbitrario. Al final del proceso, x , y y θ habrán vuelto a sus valores iniciales, pero ϕ habrá variado en una cantidad que depende del radio del círculo.

Desde luego, las ligaduras *diferenciales* no integrables de la forma de las ecuaciones (1-39) no constituyen el único punto de ligaduras no holonomas. Las condiciones de ligaduras pueden llevar consigo derivadas de orden superior, o pueden aparecer en forma de inecuaciones, según hemos visto.

En parte porque se pueden eliminar las coordenadas dependientes, los problemas que entrañan ligaduras holonomas se pueden llevar siempre a una solución formal. En cambio, no existe una manera general de abordar los problemas no holonomos. En verdad, si la ligadura no es integrable, las ecuaciones diferenciales de ligadura se pueden introducir en el problema junto con las ecuaciones diferenciales del movimiento y eliminar las ecuaciones dependientes por el método de los multiplicadores de Lagrange. Más adelante volveremos a esto. No obstante, los casos más imperfectos de ligaduras no holonomas se deben abordar individualmente y por ello, en el desarrollo de los aspectos más formales de la Mecánica clásica se supone casi invariablemente que toda ligadura, si existe, es holonoma. Esta restricción no limita mucho la aplicabilidad de la teoría, a pesar de que muchas de las ligaduras que se encuentran en la vida cotidiana son no holonomas. La razón estriba en que todo el concepto de ligaduras impuestas al sistema a través del medio de hilos o superficies o paredes sólo resulta particularmente apropiado en problemas macroscópicos o a gran escala. Pero el físico se interesa hoy en día, principalmente en problemas atómicos. A esta escala, todos los cuerpos, tanto dentro como fuera del sistema, consisten en moléculas, átomos o partículas menores que ejercen fuerzas definidas y la noción de ligadura resulta artificiosa y aparece rara vez. Las ligaduras se utilizan entonces tan sólo como idealizaciones matemáticas para el caso físico real o como aproximaciones clásicas a una propiedad mecanocuántica, p. ej., las rotaciones de un cuerpo rígido para el «spin». Dichas ligaduras son siempre holonomas y encajan bien en el marco de la teoría.

Para obviar la segunda dificultad, cual es que no se conocen a priori las fuerzas de ligadura, nos gustaría formular la Mecánica de manera que desaparezcan las fuerzas de ligadura. Entonces sólo tendríamos que tratar con fuerzas aplicadas conocidas. Una sugerencia acerca del método a seguir la da el hecho de que en un sistema particular con ligaduras, p. ej., un cuerpo rígido, el trabajo efectuado por las fuerzas interiores (que son aquí las fuerzas de ligadura) es nulo. En los apartados posteriores seguiremos esta idea y generalizaremos las que están contenidas en ella.

1-4 PRINCIPIO DE D'ALEMBERT Y ECUACIONES DE LAGRANGE

Desplazamiento virtual (infinitesimal) de un sistema es el cambio de configuración de éste a consecuencia de una variación infinitesimal arbitraria de las coordenadas $\delta \mathbf{r}_i$, compatible con las fuerzas y ligaduras impuestas al sistema en el instante dado t . Se llama virtual al desplazamiento para distinguirlo del desplazamiento real del sistema que



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

si (para ligaduras holonomas), con lo cual se podrán hacer separadamente iguales a cero los coeficientes de las δq_i .

La traducción del lenguaje de las \mathbf{r}_i al de las q_j parte de las ecuaciones de transformación (1-38),

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

(suponiendo n coordenadas independientes) y se efectúa mediante las «reglas de cadena» del cálculo de derivadas parciales.* Así, \mathbf{v}_i se expresa en función de las \dot{q}_k mediante la fórmula

$$\mathbf{v}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (1-46)$$

Análogamente, el desplazamiento virtual arbitrario $\delta \mathbf{r}_i$ se puede relacionar con los desplazamientos virtuales δq_j mediante

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1-47)$$

Notemos que aquí no interviene ninguna variación del tiempo δt , ya que un desplazamiento virtual sólo considera, por definición, desplazamientos de las coordenadas. (Sólo entonces es perpendicular el desplazamiento virtual a la fuerza de ligadura si ésta varía con el tiempo).

En función de las coordenadas generalizadas, el trabajo virtual de las \mathbf{F}_i será

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i,j} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_j Q_j \delta q_j, \end{aligned} \quad (1-48)$$

de las Q_j son las llamadas componentes de la *fuerza generalizada*, las cuales se escriben en la forma

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1-49)$$

Nótese que al igual que las q no tiene por qué tener las dimensiones de una longitud, las Q no tienen necesariamente las dimensiones de una fuerza, si bien $Q_j \delta q_j$ deben siempre tener las dimensiones de un trabajo.

Pasemos ahora al otro término de la ecuación (1-45), que puede escribirse en la forma

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i,$$

que expresando $\delta \mathbf{r}_i$ mediante (1-47) queda

$$\sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Consideremos ahora la relación

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\}, \quad (1-50)$$

En el último término de la ecuación (1-50) podemos permutar las derivaciones respecto a t y q_j , ya que, en analogía con (1-46)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}, \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}, \end{aligned}$$

en virtud de la ecuación (1-46). Además, en la ecuación (1-46) vemos que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1-$$

La sustitución de estos cambios en (1-50) conduce al resultado de que

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \right\},$$

y el segundo término del primer miembro de la ecuación (1-45) puede desarrollarse dando

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \delta q_j.$$

Identificando $\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$ con la energía cinética T del sistema, el principio D'Alembert

$$\sum_j \left[\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (1-52)$$

Notemos que en un sistema de coordenadas cartesianas la derivada parcial de T respecto a q_j es nula. Así pues, hablando el lenguaje de la Geometría diferencial, este término se debe a la curvatura de las coordenadas q_j . Por ejemplo, en coordenadas polares es en la derivada parcial de T respecto a una coordenada angular donde aparece el término de la aceleración centrípeta.

Hasta el momento no hemos impuesto otra restricción a la naturaleza de las ligaduras que la de efectuar un trabajo nulo en todo desplazamiento virtual. Las variables q_j pueden ser un sistema cualquiera de coordenadas para describir el movimiento del sistema. Sin embargo, si las ligaduras son holonomas, será posible encontrar sistemas de coordenadas q_j independientes que contengan implícitamente las condiciones de ligadura en las ecuaciones de transformación (1-38). Todo desplazamiento virtual δq_j será entonces independiente de δq_k y por tanto, la única manera de que se cumpla (1-52) es que se anulen por separado los coeficientes:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (1-53)$$

En total hay n ecuaciones.

Las ecuaciones (1-53) suele llamárseles ecuaciones de Lagrange, si bien esta designación se reserva frecuentemente para la forma que toman las ecuaciones (1-53) cuando las fuerzas derivan de un potencial escalar V :

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V.$$

En este caso, las fuerzas generalizadas pueden escribirse en la forma

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

que tiene exactamente la misma expresión de la derivada parcial de una función $-V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ respecto a q_j :

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (1-54)$$

Las ecuaciones (1-53) se pueden escribir también en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0. \quad (1-55)$$

Las ecuaciones del movimiento de la forma (1-55) no están limitadas necesariamente a sistemas conservativos; solamente si V no es función explícita del tiempo, es conservativo el sistema (cfr. p. 6). Sin embargo, tal como definimos aquí V no depende de las velocidades generalizadas. Luego podemos incluir un término en V en la derivada parcial respecto a \dot{q}_j :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

O sea, definiendo una nueva función, la *lagrangiana* L , en la forma

$$L = T - V, \quad (1-56)$$

las ecuaciones (1-53) quedan en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (1-57)$$

A menos que especifiquemos otra cosa, cuando hablemos de «ecuaciones de Lagrange» querremos significar las ecuaciones (1-57).

Debe hacerse notar que para un sistema de ecuaciones de movimiento particular no hay una elección única de lagrangiana tal que las ecuaciones (1-53) lleven a las ecuaciones de movimiento en las coordenadas generalizadas dadas. Así, en el Ejercicio 14 se demuestra que si $L(q, \dot{q}, t)$ es una lagrangiana adecuada y $F(q, t)$ es una función derivable *cualquiera* de las coordenadas generalizadas y el tiempo,

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}$$

será también una lagrangiana que dará las mismas ecuaciones del movimiento. También es posible a menudo encontrar otras Lagrangianas además de las construidas por esta prescripción (v. Ejercicio 18). Aun cuando la ecuación (1-56) constituye siempre un camino adecuado para construir una lagrangiana para un sistema conservativo, no proporciona la *única* lagrangiana adecuada para el sistema dado.

1-5 POTENCIALES DEPENDIENTES DE LA VELOCIDAD Y FUNCIÓN DE DISIPACIÓN

Las ecuaciones de Lagrange se pueden poner en la forma (1-57) aun cuando no exista función potencial, V , en el sentido usual, con tal que las fuerzas generalizadas se obtengan de una función $U(q_j, \dot{q}_j)$ mediante la prescripción

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (1-58)$$

En tal caso, las ecuaciones (1-57) siguen deduciéndose de las (1-53) estando dada la lagrangiana por

$$L = T - U. \quad (1-59)$$

U puede llamarse «potencial generalizado» o «potencial dependiente de la velocidad».* La posibilidad de utilizar dicho «potencial» no es académica; se aplica a un tipo de campos de fuerzas muy importante, cual es, las fuerzas electromagnéticas que se ejercen sobre cargas móviles. Considerando su importancia, vale la pena que nos entretengamos en este tema.

En el sistema de unidades de Gauss, las ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi\mathbf{j}}{c}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1-60)$$

* La historia de la designación dada a este potencial es curiosa. Aparentemente espoleado por la primitiva (y errónea) Electrodinámica clásica de Weber, la cual postulaba fuerzas dependientes de la velocidad, el matemático alemán E. Schering parece haber sido el primero en intentar seriamente incluir dichas fuerzas en el marco de la Mecánica, cfr. Gött, Abh. 18, 3 (1873). La primera edición de *Analytical Dynamics* (1904) de Whittaker le llama «función potencial de Schering», pero el nombre no perduró y se suprimió en ediciones posteriores. Más recientemente, Morgenstern y Szabó (*Vorlesungen über Theoretische Mechanik*, 1961) han utilizado el nombre de «potencial de Schering» para el potencial dependiente de la velocidad concreto que da la fuerza de Coriolis en un sistema de coordenadas giratorio. Nosotros preferimos el nombre «potencial generalizado», incluyendo en esta designación también la energía potencial ordinaria, función solamente de la posición.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

o, simbólicamente,

$$\mathbf{F}_f = -\nabla_v \mathcal{F}. \quad (1-68)$$

También podemos dar una interpretación física de la función de disipación. El trabajo efectuado *por* el sistema *contra* el rozamiento es

$$dW_f = -\mathbf{F}_f \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} dt = (k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2) dt.$$

Por tanto, $2\mathcal{F}$ es la disipación de energía por unidad de tiempo a causa del rozamiento. La componente de la fuerza generalizada resultante de la fuerza de rozamiento vendrá, pues, dada por

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_i \mathbf{F}_{if} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\sum \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \text{por (1.51),} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned} \quad (1-69)$$

Las ecuaciones de Lagrange quedan ahora en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (1-70)$$

con lo que para obtener las ecuaciones del movimiento deberán especificarse dos funciones escalares, L y \mathcal{F} .

1-6 APLICACIONES SENCILLAS DE LA FORMULACIÓN LAGRANGIANA

En los apartados anteriores hemos visto que en el caso de sistemas en donde podamos definir una lagrangiana, es decir, sistemas holonomos con fuerzas aplicadas que deriven de un potencial ordinario o generalizado y ligaduras que no trabajen, tenemos una manera muy conveniente de establecer las ecuaciones del movimiento. A la formulación lagrangiana nos llevó el deseo de eliminar de las ecuaciones del movimiento las fuerzas de ligadura y al conseguir este fin hemos obtenido otros muchos beneficios. Al establecer la forma original de las ecuaciones del movimiento, ecuaciones (1-19), es necesario trabajar con muchos *vectores* fuerza y aceleración. Con el método de Lagrange sólo hemos de tra-



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

y la propia ecuación es

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r,$$

en donde el segundo término es la aceleración centrípeta. Para la ecuación de θ tenemos las derivadas

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta},$$

con lo que la ecuación queda en la forma

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta.$$

Observemos que el primer miembro es la derivada respecto al tiempo del momento cinético y el segundo es exactamente el momento aplicado, con lo que no hemos hecho más que volver a deducir la ecuación (1-26).

2. Máquina de Atwood —ejemplo de sistema conservativo con ligaduras holonomas y esclerónomas (la polea se supone sin rozamiento y sin masa). Claramente, sólo hay una coordenada independiente x , estando determinada la posición del otro peso por la ligadura de que la longitud de la cuerda entre ellos es l . La energía potencial es

$$V = -M_1gx - M_2g(l - x),$$

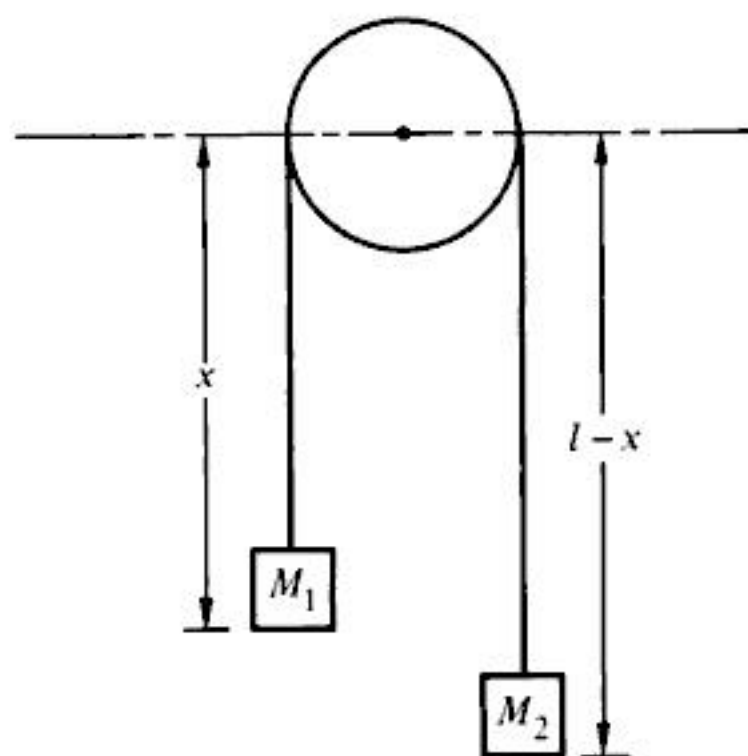


FIGURA 1-7
Máquina de Atwood



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

EJERCICIOS

1. Un núcleo, inicialmente en reposo, se desintegra radiactivamente emitiendo un electrón de cantidad de movimiento $1,73 \text{ MeV}/c$ y perpendicularmente a la dirección del electrón, un neutrino de cantidad de movimiento $1,00 \text{ MeV}/c$. (El MeV (millón de electrón-volt) es una unidad de energía, utilizada en Física moderna, igual a $1,60 \times 10^{-12} \text{ erg}$. Correspondientemente, el MeV/c es una unidad de cantidad de movimiento igual a $5,34 \times 10^{-23} \text{ gm-cm/s}$.) ¿En qué dirección retrocede el núcleo? ¿Cuál es su cantidad de movimiento en MeV/c ? Si la masa del núcleo residual es $3,90 \times 10^{-22} \text{ g}$, ¿cuál será su energía cinética en electrón-volt?

2. La *velocidad de escape* de una partícula de la Tierra es la mínima velocidad que debe tener en la superficie terrestre para que la partícula pueda escapar del campo gravitatorio terrestre. Si se desprecia la resistencia de la atmósfera, el sistema es conservativo. A partir del teorema de conservación de la suma de las energías cinética y potencial, demostrar que la velocidad de escape para la Tierra, ignorando la presencia de la Luna, es de $11,2 \text{ km/s}$.

3. Los cohetes son impulsados a causa de la cantidad de movimiento de los gases expulsados por la cola. Como éstos surgen de la reacción de los combustibles que lleva el cohete, la masa de éste no es constante sino que disminuye a medida que se gasta combustible. Demostrar que la ecuación del movimiento para un cohete que se proyecta verticalmente hacia arriba en un campo gravitatorio uniforme, despreciando la resistencia de la atmósfera, es

$$m \frac{dv'}{dt} = -v' \frac{dm}{dt} - mg,$$

donde m es la masa del cohete y v' es la velocidad de los gases expulsados relativa al cohete. Integrar esta ecuación para obtener v' en función de m , suponiendo una pérdida de masa por unidad de tiempo, constante. Demostrar, para un cohete que parte inicialmente del reposo, con v' igual a 2075 m/s y una pérdida de masa por segundo igual a $1/60$ de la masa inicial, que para alcanzar la velocidad de escape el cociente entre el peso del combustible y el del cohete vacío debe valer casi 300.

4. Demostrar que para una partícula de masa constante, la ecuación del movimiento implica la siguiente ecuación diferencial para la energía cinética:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v},$$

mientras que si la masa varía con el tiempo, la ecuación correspondiente es

$$\frac{d(mT)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{p}.$$

5. Demostrar que la magnitud R del vector de posición del centro de masa trazado a partir de un origen arbitrario viene dada por la ecuación

$$M^2 R^2 = M \sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2.$$

6. Supongamos que se sabe que un sistema de dos partículas obedece a las ecuaciones del movimiento (1-22) y (1-26). Demostrar, a partir de las ecuaciones del movimiento de las partículas individuales que las fuerzas internas entre partículas satisfacen las leyes débil y fuerte de acción y reacción. El razonamiento puede generalizarse a un sistema con un número arbitrario de partículas, proporcionando así el inverso de los razonamientos que conducen a las ecuaciones (1-22) y (1-26).



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Capítulo 2

Principios variacionales y ecuaciones de Lagrange

2-1 PRINCIPIO DE HAMILTON

La deducción de las ecuaciones de Lagrange que hemos presentado en el capítulo anterior partía de considerar el estado instantáneo del sistema y pequeños desplazamientos virtuales respecto al estado instantáneo, es decir, partía de un «principio diferencial» como el principio de D'Alembert. También pueden obtenerse las ecuaciones de Lagrange a partir de un principio que considere el movimiento entero del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 y pequeñas variaciones virtuales del movimiento entero respecto al movimiento real. A un principio de esta naturaleza le llamaremos «principio integral».

Antes de presentar el principio integral, deberemos enunciar con un lenguaje más preciso qué queremos significar con la frase «movimiento del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 ». La configuración instantánea del sistema viene descrita por los valores de las n coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n y corresponde a un punto particular en un hiperespacio cartesiano en el cual las q forman los n ejes de coordenadas. Este espacio de n dimensiones se conoce, pues, por el nombre de espacio de las configuraciones. Al ir transcurriendo el tiempo, cambia el estado del sistema y el punto representativo del sistema se mueve en el espacio de las configuraciones describiendo una curva llamada «camino del movimiento del sistema». El «movimiento del sistema» se refiere, pues, al movimiento del punto representativo del sistema a lo largo de su camino en el *espacio de las configuraciones*. El tiempo se puede considerar formalmente como parámetro de la curva; a cada punto del camino se asocia uno o más valores del tiempo. Debe hacerse resaltar que el espacio de las configuraciones no tiene necesariamente ninguna relación con el espacio físico tridimensional, al igual que las coordenadas generalizadas no son necesariamente coordenadas de posición. El camino del movimiento en el espacio de las configuraciones no tendrá necesariamente ninguna semejanza con el camino que siga una partícula real cualquiera en el espacio; cada punto del camino del movimiento representa la configuración *entera* del sistema en un cierto instante dado.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Por los métodos usuales de derivación bajo el signo integral encontramos que

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right\} dx. \quad (2-7)$$

Consideremos la segunda de estas integrales:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx.$$

Integrando por partes, la integral queda en la forma

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \quad (2-8)$$

Las condiciones impuestas a todas las curvas variadas son que pasen por los puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y por tanto, en x_1 y x_2 se anulará la derivada parcial de y respecto a α . Por tanto, el primer término de (2-8) se anula y la ecuación (2-7) se reduce a

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx.$$

La condición de valor estacionario (ec. 2-6) es, pues, equivalente a la ecuación

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 dx = 0. \quad (2-9)$$

Ahora bien, la derivada parcial de y respecto a α que aparece en la ecuación (2-9) es una función de x que es arbitraria salvo en lo que respecta a la continuidad y condiciones en los puntos extremos. Por ejemplo, para la familia paramétrica particular de caminos variados dada por la ecuación (2-4), es la función arbitraria $\eta(x)$. Podemos, pues, aplicar a la ecuación (2-9) el llamado «lema fundamental» del cálculo de variaciones que dice que si

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \eta(x) dx = 0 \quad (2-10)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}.$$

En este caso, la ecuación (2-11) queda en la forma

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0$$

o sea

$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = a,$$

donde a es una constante de integración evidentemente menor que el valor mínimo de x . Elevando al cuadrado ambos miembros y reduciendo términos semejantes, tenemos

$$\dot{y}^2(x^2 - a^2) = a^2$$

o despejando,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

La integral general de esta ecuación diferencial, a la luz de la naturaleza de a , es

$$y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \operatorname{arc} \cosh \frac{x}{a} + b$$

o sea

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a},$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

separado los coeficientes de las δy_i :

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2-18)$$

Las ecuaciones (2-18) representan la generalización de (2-11) apropiada para varias variables y se conocen por el nombre de *ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange*. Sus soluciones representan curvas para las cuales la variación de una integral de la forma dada en (2-14) se anula. Otras generalizaciones del problema variacional fundamental son fácilmente posibles. Así, podemos tomar f como una función de derivadas de orden superior, \ddot{y} , $\ddot{\ddot{y}}$, etc., que conducen a ecuaciones diferentes de la (2-18). O se puede ampliar a casos en los que haya varios parámetros x_j y la integral sea múltiple, conteniendo también f tantas derivadas variables de y_i respecto a cada uno de los parámetros x_j . Finalmente, se pueden considerar variaciones en las cuales los puntos terminales *no* se mantengan fijos.

Para los fines presentes, es suficiente lo que hemos deducido aquí, ya que la integral del principio de Hamilton,

$$I = \int_1^2 L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (2-19)$$

tiene exactamente la forma estipulada en (2-14) con las transformaciones

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y_i &\rightarrow q_i \\ f(y_i, \dot{y}_i, x) &\rightarrow L(q_i, \dot{q}_i, t). \end{aligned}$$

Al deducir las ecuaciones (2-18) se supuso que las variables y_i eran independientes. La condición correspondiente en relación con el principio de Hamilton es que sean independientes las coordenadas generalizadas q_i , lo que exige que las ligaduras sean holonomas. Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la integral I se convierten entonces en las ecuaciones de Lagrange del movimiento,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

y hemos conseguido nuestro propósito inicial, que era demostrar que las ecuaciones de Lagrange se deducen del principio de Hamilton —para sistemas monógenos con ligaduras holonomas.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

ecuaciones del movimiento son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k. \quad (2-31)$$

Pero éstas deben ser idénticas a las ecuaciones (2-29). Por tanto, podemos identificar $\Sigma \lambda_{ik}$ con las Q'_k , fuerzas generalizadas de ligadura. En este tipo de problema no eliminamos en realidad las fuerzas de ligadura de la formulación y se dan como parte de la respuesta.

Aun cuando no sea evidente, la versión del principio de Hamilton que hemos adoptado para sistemas no holonomos exige también que las ligaduras no trabajen en los desplazamientos virtuales. Esto puede verse muy bien escribiendo el principio de Hamilton en la forma

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt = 0.$$

Si la variación de la integral sobre el potencial generalizado se lleva a cabo por los procedimientos de § 2-3, el principio adopta la forma

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt;$$

o, en virtud de la ecuación (1-58),

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_k Q_k \delta q_k dt. \quad (2-32)$$

Así vestido, el principio de Hamilton dice que la diferencia de la integral temporal de la energía cinética entre dos caminos vecinos es igual a la integral temporal del trabajo efectuado en los desplazamientos virtuales entre los caminos, cambiada de signo. El trabajo que interviene es el efectuado sólo por las fuerzas que derivan del potencial generalizado. Si queremos que el mismo principio de Hamilton sea válido tanto para sistemas holonomos como no holonomos, debe exigirse que las fuerzas adicionales de ligaduras no holonomas no trabajen en los desplazamientos δq_k . Esta restricción es paralela a la condición anterior de que el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura holonoma sea también nulo (cfr. § 1-4). En la práctica, la restricción no reduce mucho las aplicaciones, ya que la mayoría de problemas en los que se usa el formalismo no



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

junto con

$$\lambda = \frac{Mg \operatorname{sen} \phi}{2}$$

y

$$\ddot{\theta} = \frac{g \operatorname{sen} \phi}{2r}.$$

Luego el aro rueda plano abajo con sólo la mitad de la aceleración que tendría si deslizará por un plano de rozamiento y la fuerza de rozamiento de ligadura será $\lambda = Mg \operatorname{sen} \phi/2$.

De

$$\ddot{x} = v \frac{dv}{ds},$$

se obtiene $v = \sqrt{gl \operatorname{sen} \phi}$ en la parte inferior, que también se podría haber obtenido por medios elementales.

2-5 VENTAJAS DE UNA FORMULACIÓN DE PRINCIPIO VARIACIONAL

Aun cuando vemos que es posible ampliar la formulación original del principio de Hamilton (2-2) para incluir algunas ligaduras no holonomas, prácticamente, esta formulación de la Mecánica resulta muy útil cuando para el sistema pueda establecerse una lagrangiana de coordenadas independientes. La formulación del principio variacional se ha descrito justamente como «elegante», ya que en el compacto principio de Hamilton está contenida toda la Mecánica de sistemas holonomos con fuerzas derivables de potenciales. El principio tiene además el mérito de que sólo comporta magnitudes físicas que pueden definirse sin hacer referencia a un sistema particular de coordenadas generalizadas, a saber, las energías cinética y potencial. Por tanto, la formulación es automáticamente invariante respecto a la elección de las coordenadas del sistema.

Del principio variacional de Hamilton resulta también evidente por qué la lagrangiana está definida salvo la derivada total respecto al tiempo de una función cualquiera de las coordenadas y del tiempo, tal como se indicó al final de § 1-4. La integral temporal de dicha derivada total entre los puntos 1 y 2 sólo depende de los valores de la función arbitraria en los puntos terminales. Como la variación en los puntos terminales es nula, la adición a la lagrangiana de la derivada respecto al tiempo arbitraria no afecta al comportamiento variacional de la integral.

Otra ventaja es que la formulación de Lagrange puede ampliarse fácilmente para describir sistemas que no se consideran normalmente en Dinámica —tales como el campo



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

derivan de potenciales que sólo dependen de la posición. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &\equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= m_i \dot{x}_i = p_{ix},\end{aligned}$$

que es la componente x de la cantidad de movimiento asociada a la partícula i -ésima. Este resultado nos sugiere una ampliación evidente del concepto de cantidad de movimiento. La cantidad de movimiento generalizada asociada a la coordenada q_j se define en la forma

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2-44)$$

A p_j se le llama también *cantidad de movimiento canónica* o *cantidad de movimiento conjugada*. Notemos que si q_j no es una coordenada cartesiana, p_j no tiene que tener necesariamente las dimensiones de una cantidad de movimiento. Es más, si hay un potencial que dependa de la velocidad, incluso en el caso de que sea q_j una coordenada cartesiana la cantidad de movimiento *generalizada* asociada a ella no será igual a la cantidad de movimiento *mecánica* usual. Así pues, en el caso de un grupo de partículas en el campo electromagnético la lagrangiana es (cfr. 1-66)

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 - \sum_i q_i \phi(x_i) + \sum_i \frac{q_i}{c} \mathbf{A}(x_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

(aquí, q_i representa carga) y la cantidad de movimiento generalizada conjugada a x_i es

$$p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + \frac{q_i A_x}{c}, \quad (2-45)$$

es decir, la cantidad de movimiento mecánica más un término adicional.

Cuando la lagrangiana de un sistema no contenga una coordenada dada q_j (aun cuando pueda contener la velocidad correspondiente \dot{q}_j), diremos que la coordenada es *cíclica* o *ignorable*. Esta definición no es universal,* pero es la acostumbrada y vamos a utilizarla.

* Los dos términos suelen tomarse indistintamente y con el mismo significado que les hemos asignado. No obstante, algunos autores distinguen entre ambos, llamando coordenada cíclica a la que no esté en la energía cinética, T , y coordenada ignorable a la que no figure en la lagrangiana (cfr. Webster, *The Dynamics of Particles*, y Byerly, *Generalized Coordinates*). Ames y Murnaghan (*Theoretical Mechanics*) utilizan ambos términos indistintamente pero parece ser que los limitan a significar una coordenada que no figure en T . Lanczos (*Variational Principles of Mechanics*) ha resucitado un viejo término «kinosténica» como equivalente a cíclica o ignorable. Además, «cíclica» se utiliza a veces en otro sentido en relación con las variables periódicas (cfr. § 9-5 y Synge, *Encyclopedia of Physics*, Vol. 3/1, p. 102).



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

De manera análoga puede demostrarse que si una coordenada cíclica q_j es tal que dq_j corresponde a una rotación del sistema de partículas alrededor de un eje, la conservación de su cantidad de movimiento conjugada corresponde a la conservación de un momento cinético. Por el mismo razonamiento antes empleado, T no puede contener a q_j , ya que una rotación del sistema de coordenadas no puede afectar a la magnitud de las velocidades. Por tanto, la derivada parcial de T respecto a q_j deberá ser nula, también ahora; y como V es independiente de \dot{q}_j obtenemos una vez más la ecuación (2-48). Pero ahora queremos demostrar que siendo q_j una coordenada de rotación la fuerza generalizada es la componente según el eje de rotación del momento resultante aplicado y p_j es la componente del momento cinético resultante respecto a dicho eje.

La fuerza generalizada Q_j viene dada por

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j},$$

pero ahora la derivada tiene un significado diferente del de antes. En el caso actual, el cambio de q_j debe corresponder a una rotación infinitesimal del vector \mathbf{r}_i , manteniéndose constante el módulo del vector. La figura 2-8 nos facilita la obtención del módulo de la derivada:

$$|d\mathbf{r}_i| = r_i \sin\theta \, dq_j$$

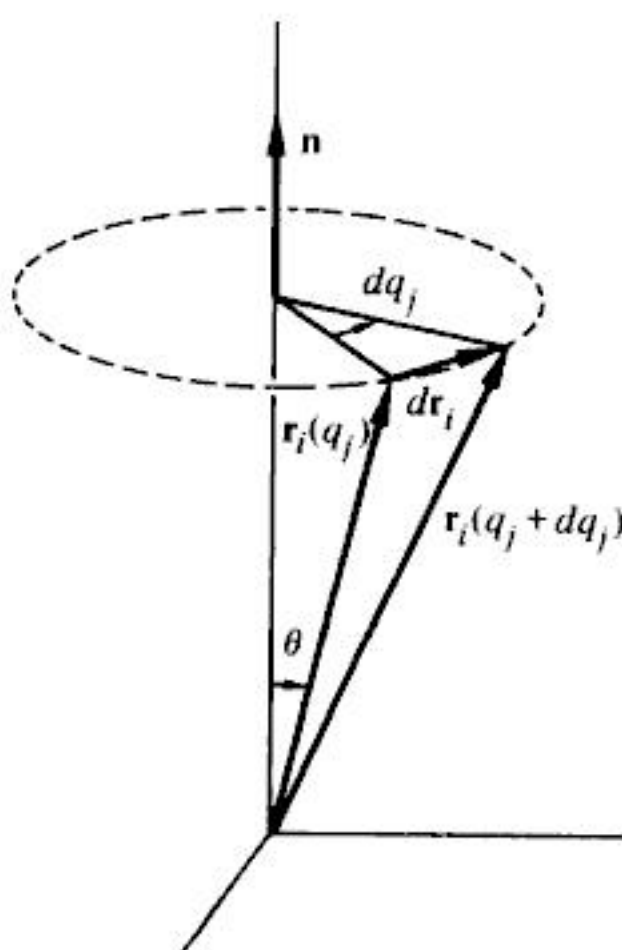


FIGURA 2-8
Cambio de un vector de posición ante una rotación del sistema.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

En ciertas circunstancias, la función h es la energía total del sistema. Para determinar cuáles son estas circunstancias, recordemos que la energía cinética total de un sistema puede siempre escribirse en la forma

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (1-73)$$

donde T_0 es función de las coordenadas generalizadas solamente, $T_1(q, \dot{q})$ es lineal en las velocidades generalizadas y $T_2(q, \dot{q})$ es función cuadrática de las \dot{q} . Para una amplia gama de sistemas y conjuntos de coordenadas generalizadas, la lagrangiana se puede descomponer análogamente según su comportamiento funcional respecto a las variables \dot{q} :

$$L(q, \dot{q}, t) = L_0(q, t) + L_1(q, \dot{q}, t) + L_2(q, \dot{q}, t). \quad (2-55)$$

Aquí, L_2 es una función homogénea de segundo grado (no meramente cuadrática) en \dot{q} mientras que L_1 es homogénea de primer grado en \dot{q} . No existe ninguna razón intrínseca a la Mecánica que exija que la lagrangiana sea del tipo representado por la ecuación (2-55), pero de hecho lo es en casi todos los problemas de interés. La lagrangiana tiene claramente esa forma cuando las fuerzas derivan de un potencial que no contenga las velocidades. Incluso en el caso de potenciales que dependan de las velocidades observamos que la lagrangiana para una partícula cargada en un campo electromagnético (ec. 1-66) satisface la ecuación (2-55). Ahora bien, recordemos que el teorema de Euler dice que si f es función homogénea de grado n en las variables x_i , se cumple*

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f. \quad (2-56)$$

Aplicado a la función h (ec. 2-53) para lagrangianas de la forma (2-55), este teorema implica que

$$h = 2L_2 + L_1 - L = L_2 - L_0. \quad (2-57)$$

Si las ecuaciones de transformación que definen las coordenadas generalizadas (ec. 1-38) no contienen explícitamente el tiempo, en virtud de las ecuaciones (1-68) $T = T_2$. Si, además, el potencial no depende de las velocidades generalizadas, será $L_2 = T$ y $L_0 = -V$, con lo cual

$$h = T + V = E. \quad (2-58)$$

* Podemos encontrarlo en la mayoría de textos de Cálculo superior; p. ej., W. Kaplan, *Advanced Calculus*, 2.ª ed., p. 139.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

ecuación diferencial por analogía con la integral de Jacobi h . Con ayuda de esta integral, demostrar que la curva buscada es una hipocicloide (curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sobre el interior de una circunferencia mayor). Obtener una expresión del tiempo de recorrido a lo largo de la braquistócrona entre dos puntos de la superficie terrestre. ¿Cuánto tardaría en ir de Nueva York a Los Ángeles (supuestas separadas 3 000 millas) a lo largo de un túnel de braquistócrona (suponiendo ausencia de rozamiento) y cuál sería la máxima profundidad bajo la superficie terrestre del túnel de braquistócrona?

5. En el problema de la superficie de revolución de área mínima, examinar el caso simétrico $y_2 = y_1$, $x_2 = -x_1 > 0$ y expresar la condición para el parámetro a en forma de ecuación trascendente en función de las cantidades adimensionales $k = x_2/a$ y $\alpha = y_2/x_2$. Demostrar que para α mayor que un determinado valor α_0 son posibles dos valores de k , para $\alpha = \alpha_0$ sólo es posible un valor de k , mientras que si $\alpha < \alpha_0$ no puede hallarse ningún valor real de k (o a), por lo que en esa región no existirá solución catenaria. Hallar el valor de α_0 , numéricamente si es necesario.

6. La solución de línea quebrada descrita en el texto, en la cual el área de revolución es sólo la de los círculos extremos de radios y_1 e y_2 , respectivamente, se conoce por el nombre de *solución Goldschmidt*. Para la situación simétrica tratada en el Ejercicio 5, obtener una expresión del cociente entre el área generada por la solución catenaria y la dada por la solución Goldschmidt. El resultado debemos ponerlo en función de los parámetros k y α , solamente. Demostrar que para valores de α suficientemente grandes, al menos una de las catenarias de una área por debajo de la de la solución Goldschmidt. Demostrar, por otra parte, que si $\alpha = \alpha_0$, la solución Goldschmidt da una área menor que la catenaria.

7. Una cadena o cuerda de longitud indefinida pasa libremente por poleas situadas a alturas y_1 e y_2 sobre la superficie plana de la Tierra, estando separadas horizontalmente por una distancia $x_2 - x_1$. Si la cadena o cuerda tiene una densidad lineal uniforme, demostrar que el problema de hallar la curva supuesta entre las poleas es el mismo que el de la superficie mínima de revolución. (La transición a la solución Goldschmidt cuando se cambian las alturas y_1 e y_2 constituye una demostración en clase, espectacular).

8. Supongamos que se supiera experimentalmente que una partícula caía a una distancia dada y_0 en un tiempo $t_0 = \sqrt{2y_0/g}$, pero no se conociera el tiempo de caída para distancias distintas de y_0 . Supongamos, además, que se conoce la lagrangiana del problema pero que en vez de resolver la ecuación del movimiento para obtener y , se supone que la forma funcional es

$$\int_0^{t_0} L dt$$

Si se ajustan las constantes a y b siempre de manera que el tiempo correspondiente a una caída y_0 venga dado correctamente por t_0 , demostrar directamente que la integral

$$y = at + bt^2.$$

será un extremo para valores reales de los coeficientes solamente cuando $a = 0$ y $b = g/2$.

9. Cuando chocan dos bolas de billar, las fuerzas instantáneas que se ejercen son muy intensas pero



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

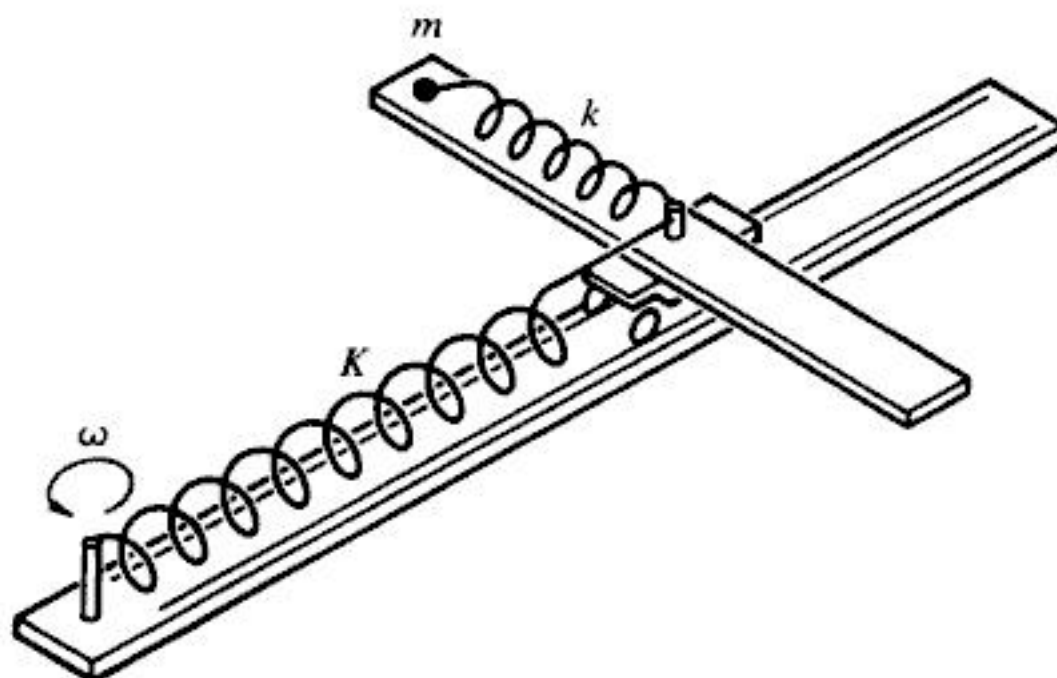


You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- c) En función de las coordenadas generalizadas relativas a un sistema que gire con velocidad angular ω , ¿cuál es la lagrangiana? ¿Cuál es la integral de Jacobi? ¿Se conserva? Discutir la relación entre las dos integrales de Jacobi.



21. Supongamos que se mueve una partícula en el espacio sometida a un potencial conservativo $V(\mathbf{r})$ pero que está obligada siempre a moverse sobre una superficie cuya ecuación es $\sigma(\mathbf{r}, t) = 0$. (La dependencia explícita de t indica que la superficie puede estar en movimiento.) La fuerza instantánea de ligadura se toma siempre perpendicular a la superficie. Demostrar analíticamente que no se conserva la energía de la partícula si la superficie se mueve con el tiempo. ¿Cuál es, físicamente, la razón de que no se conserve la energía en esta circunstancia?
22. El oscilador armónico unidimensional tiene por lagrangiana $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$. Supongamos que no conociéramos la solución del movimiento, pero viéramos que el movimiento debiera ser periódico y por tanto se pudiera describir mediante una serie de Fourier de la forma

$$x(t) = \sum_{j=0} a_j \cos j\omega t$$

(tomando $t = 0$ en un punto de inversión del movimiento) donde ω es la pulsación (desconocida) del movimiento. Esta representación de $x(t)$ define un camino de varios parámetros para el punto representativo del sistema en el espacio de las configuraciones. Consideremos la integral de acción I para dos puntos t_1 y t_2 separados por el período $T = 2\pi/\omega$. Demostrar que con esta forma del camino del sistema, I es un extremo para x no nula sólo si $a_j = 0$, para $j \neq 1$, y sólo si $\omega^2 = k/m$.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

polares esféricas son el ángulo azimut θ , el ángulo cenital (o colatitud) ψ y la distancia radial r . Tomando el eje polar en la dirección de \mathbf{L} , el movimiento tendrá siempre lugar en un plano normal al eje polar. La coordenada ψ tendrá entonces sólo el valor constante $\pi/2$ y podremos prescindir de ella en el estudio que sigue. La conservación del vector momento cinético proporciona tres constantes del movimiento independientes (correspondientes a las tres componentes cartesianas). De hecho, dos de ellas, que expresan la *dirección* constante del momento cinético, se han utilizado para reducir el problema de tres grados de libertad a dos. La tercera de dichas constantes, correspondiente a la conservación del módulo de \mathbf{L} , sigue a nuestra disposición para completar la solución.

Expresada ahora en coordenadas polares, la lagrangiana es

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \end{aligned} \quad (3-6)$$

Según ya vimos, θ es una coordenada cíclica cuya cantidad de movimiento canónica es el momento cinético del sistema:

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

Una de las dos ecuaciones del movimiento será, simplemente,

$$\dot{p}_{\theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (3-7)$$

con la integral inmediata

$$mr^2\dot{\theta} = l, \quad (3-8)$$

donde l es la magnitud constante del momento cinético. De (3-7) se deduce también que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right) = 0. \quad (3-9)$$

Se introduce el factor $\frac{1}{2}$ porque $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ es la *velocidad areolar* —área barrida por el vector de posición por unidad de tiempo. Esta interpretación se deduce del diagrama de la figura 3-2: el área barrida en un tiempo dt es

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta),$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Si es θ_0 el valor inicial de θ , la integral de (3-19) será, simplemente,

$$\theta = l \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0. \quad (3-20)$$

Las ecuaciones (3-18) y (3-20) son las dos ecuaciones que quedan y, formalmente, el problema se ha reducido a cuadraturas, con cuatro constantes de integración $E, l, r_0, \dot{\theta}_0$. Estas constantes no son las únicas que pueden considerarse. Podríamos igualmente haber tomado $r_0, \theta_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0$, pero desde luego E y l se pueden siempre determinar a partir de este conjunto de valores. Sin embargo, para muchas aplicaciones, el conjunto que contiene la energía y el momento cinético es el natural. En Mecánica cuántica, las constantes como r y θ , o \dot{r} y $\dot{\theta}$, carecen de significado, pero podemos seguir hablando de la energía del sistema o de su momento cinético. Las diferencias sobresalientes entre las Mecánicas clásica y cuántica aparecen en ambas teorías en las propiedades de E y l . Por tanto, para estudiar la transición a las teorías cuánticas será importante dar la descripción clásica del sistema en función de su energía y su momento cinético.

3-3 PROBLEMA UNIDIMENSIONAL EQUIVALENTE Y CLASIFICACIÓN DE ÓRBITAS

Aun cuando se haya resuelto formalmente el problema, desde un punto de vista práctico las integrales (3-18) y (3-20) suelen ser de difícil manejo y en todo caso concreto suele ser más conveniente efectuar la integración de alguna otra manera. Pero antes de obtener la solución para leyes de fuerza concreta, veamos qué podemos aprender del movimiento en el caso general, utilizando solamente las ecuaciones del movimiento y los teoremas de conservación, sin exigir soluciones explícitas.

Por ejemplo, en el caso de un sistema de energía y momento cinético conocidos, podemos determinar de manera inmediata la magnitud y dirección de la velocidad de la partícula en función de la distancia r . La magnitud v se deduce inmediatamente de la conservación de la energía en la forma

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$$

o sea

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}. \quad (3-21)$$

La velocidad radial —componente de $\dot{\mathbf{r}}$ según el vector de posición— se dio ya en la ecuación (3-16). Combinada con la magnitud v da suficiente información para obtener la



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

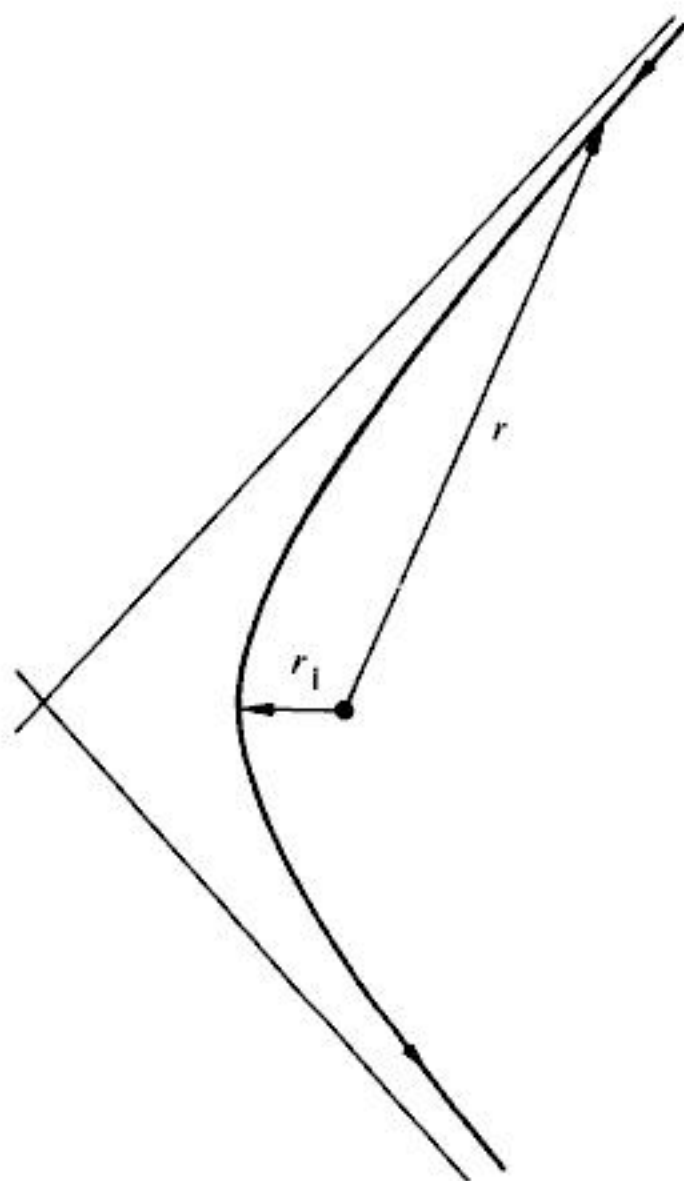


FIGURA 3-5

Imagen esquemática de la órbita para E_1 correspondiente a un movimiento ilimitado.

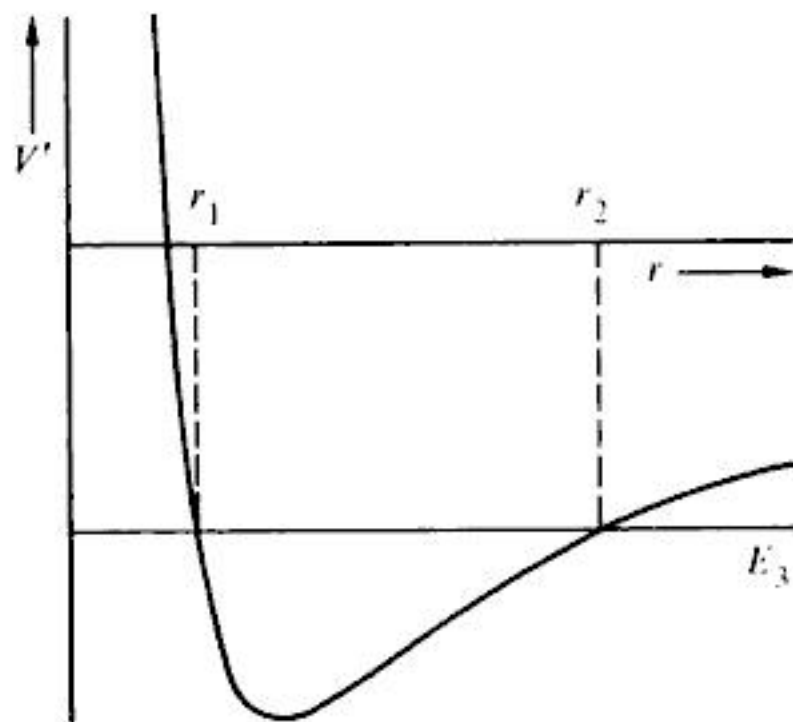


FIGURA 3-6

Potencial unidimensional equivalente para una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, que ilustra el movimiento acotado a energías negativas.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

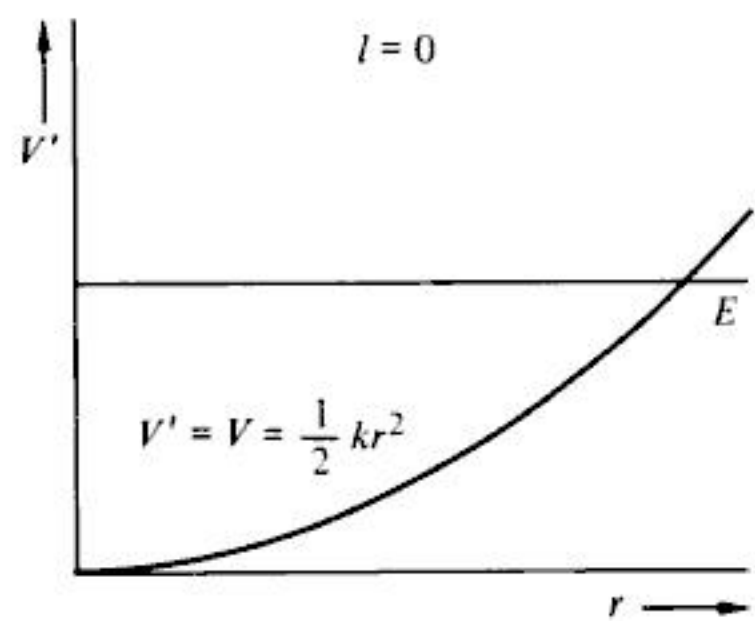


FIGURA 3-10

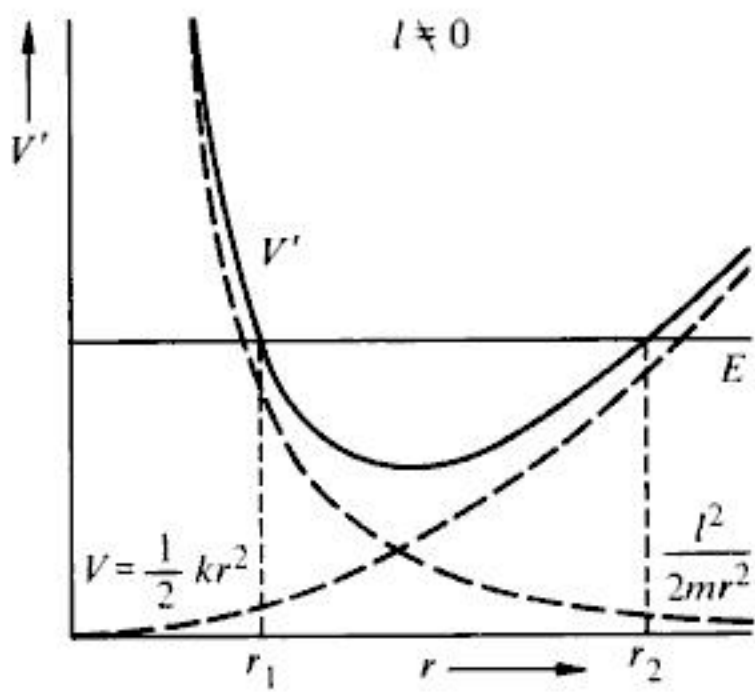


FIGURA 3-11

la situación es la representada en la figura 3-10. Para toda energía positiva el movimiento es limitado y según sabemos, armónico simple. Si $l \neq 0$ tenemos el estado representado en la figura 3-11. Entonces, el movimiento está siempre limitado para todas las energías físicamente posibles y no pasa por el centro de fuerzas. En este caso particular, se ve fácilmente que la órbita es elíptica, ya que si $\mathbf{f} = -k\mathbf{r}$, las componentes x e y de la fuerza son

$$f_x = -kx, \quad f_y = -ky.$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

que, suprimiendo el factor común a ambos miembros $\frac{1}{2}$, se convierte en la conocida ley de Boyle. Cuando contribuyan al virial fuerzas entre partículas, ya no se cumplirá la ley de los gases perfectos. El teorema del virial es, en la teoría cinética clásica, la herramienta principal para calcular la ecuación de estado correspondiente al gas no perfecto.

Aún podemos demostrar que si las fuerzas \mathbf{F}_i son la suma de fuerzas \mathbf{F}'_i que no sean de rozamiento más fuerzas de rozamiento \mathbf{f}_i proporcionales a la velocidad, el virial sólo depende de las \mathbf{F}'_i ; no hay contribución de las \mathbf{f}_i . Desde luego, el movimiento del sistema no podrá extinguirse a consecuencia de las fuerzas de rozamiento. Deberá irse entregando constantemente energía al sistema para mantener el movimiento; de no ser así, *todas* las medias temporales se anularían al crecer τ indefinidamente. (Ver Ejercicio 4.)

Si las fuerzas derivan de un potencial, el teorema queda en la forma

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_i \nabla V \cdot \mathbf{r}_i}, \quad (3-27)$$

y en el caso de una sola partícula que se mueva bajo la acción de una fuerza central, se reduce a

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial V}{\partial r} r}. \quad (3-28)$$

Si V es una función potencial de r ,

$$V = ar^{n+1},$$

donde se toma el exponente de manera que la ley de la fuerza varíe de igual manera que r^n , entonces

$$\frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V,$$

y la ecuación (3-28) queda

$$\bar{T} = \frac{n+1}{2} \bar{V}. \quad (3-29)$$

La aplicación del teorema de Euler para funciones homogéneas (cfr. p. 75) nos indica que la ecuación (3-29) es válida siempre que V sea función homogénea en r de grado $n+1$. En el caso particular de fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, $n =$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

o bien, si hacemos el cambio de variable $u = 1/r$,

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}} \quad (3-37)$$

Al igual que en el caso de la ecuación del movimiento, la ecuación (3-37), para resolver formalmente el problema, no siempre es una solución ejecutable porque frecuentemente la integral no se puede expresar mediante funciones conocidas. En realidad, sólo se han estudiado ciertos tipos de leyes de fuerza. Las más importantes son las funciones potenciales de r ,

$$V = ar^{n+1} \quad (3-38)$$

con lo que la fuerza varía como lo hace la potencia n -ésima de r .^{*} Con este potencial, la ecuación (3-37) queda en la forma

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1} - u^2}} \quad (3-39)$$

También esta será integrable mediante funciones simples tan sólo en ciertos casos. Si la cantidad subradical no tiene potencias de u superiores al cuadrado, el denominador tiene la forma $\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}$ y se podrá efectuar la integración directamente mediante funciones circulares. Esta restricción equivale a exigir que

$$-n - 1 = 0, 1, 2,$$

o, excluyendo el caso $n = -1$,

$$n = -2, -3,$$

^{*} En lo que sigue hay que excluir el caso $n = -1$. En el potencial (3-38) corresponde a un potencial constante, es decir, no hay fuerza alguna. Un caso igualmente anómalo se tiene si se usa el exponente directamente en la ley de la fuerza, ya que una fuerza que varíe como r^{-1} corresponde a un potencial logarítmico que no sería una ley potencial. El potencial logarítmico es inusual para el movimiento en torno a un punto; es más característico de una fuente *lineal*.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

integrales elípticas.

3-6 CONDICIONES PARA ÓRBITAS CERRADAS (TEOREMA DE BERTRAND)

Aún no hemos sacado toda la información que puede obtenerse del problema unidimensional equivalente o de la ecuación de la órbita sin resolver explícitamente el movimiento. En particular, se puede deducir un teorema potente y que induzca a meditar acerca de los tipos de fuerzas centrales atractivas que lleven a *órbitas cerradas*, es decir, órbitas en las cuales la partícula llegue a trazar de nuevo sus propios pasos.

Ya hemos descrito un tipo de órbita cerrada, cual es la circunferencia centrada en el centro de fuerzas. Para todo l dado, esto tendrá lugar si el potencial equivalente $V'(r)$ tiene un mínimo o máximo a cierta distancia r_0 y si la energía E es igual a $V'(r_0)$. El requisito de que V' tenga un extremo equivale a la anulación de f' en r_0 , lo que conduce a la condición deducida anteriormente (cfr. p. 97),

$$f(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3}, \quad (3-41)$$

que dice que la fuerza debe ser atractiva para que sean posibles las órbitas circulares. Además, la energía de la partícula debe venir dada por

$$E = V(r_0) + \frac{l^2}{2mr_0^2}, \quad (3-42)$$

que, por la ecuación (3-15), corresponde al requisito de que en una órbita circular \dot{r} es cero. Las ecuaciones (3-41) y (3-42) son elementales y conocidas. Implican que para toda fuerza central atractiva es posible tener una órbita circular a cierto radio arbitrario r_0 si el momento cinético l viene dado por la ecuación (3-41) y la energía de la partícula por la ecuación (3-42).

El carácter de la órbita circular depende de que el extremo de V' sea un mínimo, como en la figura 3-8, o un máximo, como en la figura 3-9. Si la energía es ligeramente superior a la necesaria para una órbita circular para el valor dado de l , en el caso de un mínimo de V' el movimiento, aun cuando ya no sea circular, seguirá estando acotado. En cambio, si V' presenta un máximo, la más leve elevación de E por encima del valor circular, ecuación (3-34), da lugar a un movimiento no acotado en el cual la partícula se mueve atravesando el centro de fuerzas y alejándose hacia el infinito para el potencial representado en la figura 3-9. Tomando la terminología del caso del equilibrio estático, diremos que la órbita circular que surge en la figura 3-8 es *estable*; la de la figura 3-9 es *inestable*. La estabilidad de la órbita circular está, pues, determinada por el signo de la segunda derivada de V' en el radio de la circunferencia, siendo estable cuando la segunda derivada es positiva



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

la ecuación de la órbita que así es. Luego, *las únicas fuerzas centrales que dan lugar a órbitas cerradas para todas las partículas ligadas son la inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y la ley de Hooke.**

He aquí un resultado notable que da por bien empleados los engorrosos cálculos que a él nos llevan. La observación astronómica nos ha llevado al hecho conocido de que los cuerpos celestes que están ligados se mueven siguiendo órbitas que, en primera aproximación, son cerradas. En la mayoría, las desviaciones respecto a una órbita cerrada son imputables a perturbaciones tales como la presencia de otros cuerpos. El predominio de órbitas cerradas es cierto tanto si consideramos solamente el Sistema Solar como si observamos los numerosos ejemplos de las estrellas binarias que se han examinado. Ahora bien, la ley de Hooke constituye una ley de fuerza cuya validez a todas las distancias resulta irreal, ya que implica una fuerza que crezca indefinidamente hasta el infinito. Así pues, la existencia de órbitas cerradas para una amplia gama de condiciones iniciales nos lleva por sí misma a la conclusión de que la fuerza gravitatoria es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Por ejemplo, no necesitamos utilizar el carácter elíptico de las órbitas para llegar a la ley de la fuerza gravitatoria.

Podemos enunciar esta conclusión de manera ligeramente diferente que tendrá más significado en la Física moderna. El movimiento orbital en un plano se puede considerar compuesto de dos movimientos oscilatorios, uno en r y otro en θ . Que la órbita sea cerrada equivale a decir que los periodos de las dos oscilaciones están conmensurados —que son *degenerados*. Luego, *el carácter degenerado de las órbitas en un campo gravitatorio fija la forma de la ley de fuerza*. Más adelante encontraremos otras formulaciones de la relación entre la degeneración y la naturaleza del potencial.

3-7 PROBLEMA DE KEPLER: FUERZA INVERSAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA DISTANCIA

La ley inversamente proporcional al cuadrado de la distancia es la más importante de todas las leyes de fuerzas centrales y merece un tratamiento detallado. En este caso, la fuerza y el potencial pueden escribirse en la forma

$$f = -\frac{k}{r^2}, \quad V = -\frac{k}{r}. \quad (3-49)$$

Existen diversas maneras de integrar la ecuación de la órbita, siendo la más sencilla sus-

* Parece ser que a esta conclusión llegó por primera vez J. Bertrand, *Comptes Rendus*, 77, 849-853 (1873), por lo que se le da a veces el nombre de teorema de Bertrand. Véase más literatura al respecto en las referencias del final de este capítulo.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

La naturaleza de la órbita depende del valor de e según el esquema siguiente:

$$\begin{array}{lll} e > 1, & E > 0: & \text{hipérbola,} \\ e = 1, & E = 0: & \text{parábola,} \\ e < 1, & E < 0: & \text{elipse,} \\ e = 0, & E = -\frac{mk^2}{2l^2}: & \text{circunferencia.} \end{array}$$

Esta clasificación concuerda con el estudio cualitativo de las órbitas basado en el diagrama energético del potencial unidimensional equivalente V' . Ahora, la condición de movimiento circular aparece de manera un tanto diferente, pero puede deducirse fácilmente como consecuencia de las condiciones de circularidad anteriores. En el caso de una órbita circular, T y V son constantes en el tiempo y según el teorema del virial

$$E \equiv T + V = -\frac{V}{2} + V = \frac{V}{2}.$$

Luego

$$E = -\frac{k}{2r_0}. \quad (3.58)$$

Pero según la ecuación (3-41), para el equilibrio entre la fuerza central y la «fuerza efectiva», podemos escribir

$$-\frac{k}{r_0^2} = -\frac{l^2}{mr_0^3},$$

o sea

$$r_0 = \frac{l^2}{mk}. \quad (3.59)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

o sea

$$t = \frac{l^3}{2mk^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right). \quad (3-67)$$

Es ésta una relación inmediata para t en función de θ ; la inversión para obtener θ en un instante dado exige resolver una ecuación cúbica en $\operatorname{tg}(\theta/2)$ y luego hallar el arc tg correspondiente. La distancia radial en el instante dado se da entonces mediante la ecuación orbital.

En el caso de movimiento elíptico, la ecuación (3-65) se integra más convenientemente mediante una variable auxiliar ψ , llamada *anomalía excéntrica** y definida por la relación

$$r = a(1 - e \cos \psi). \quad (3-68)$$

Comparando con la ecuación (3-64) de la órbita, queda claro que ψ también cubre el intervalo entre 0 y 2π cuando θ evoluciona a lo largo de una revolución completa y que el perihelio tiene lugar en $\psi = 0$ (donde $\theta = 0$ por convenio) y el afelio en $\psi = \pi = \theta$. Podemos dar a θ una interpretación geométrica, pero sólo tiene interés histórico (ver, p. j., McCuskey, *Introduction to Celestial Mechanics*, p. 45). Expresando E y l en función de a , e y k , la ecuación (3-65) podrá escribirse, para el movimiento elíptico, en la forma

$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^r \frac{r \, dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}}, \quad (3-69)$$

donde, por el convenio acerca del tiempo de partida, r_0 es la distancia al perihelio. La sustitución de r en función de ψ mediante la ecuación (3-68) reduce esta integral, tras algunas transformaciones, a la forma simple

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{n}} \int_0^\psi (1 - e \cos \psi) \, d\psi. \quad (3-70)$$

* El nombre está relacionado con la terminología de la astronomía medieval en la cual a θ se le daba el nombre de *anomalía verdadera*.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Una pequeña transformación algebraica nos permite poner esta expresión en la forma

$$\cos \theta = \frac{\cos \psi - e}{1 - e \cos \psi}. \quad (3-77)$$

Sumando y restando sucesivamente de la unidad los dos miembros de la ecuación (3-77) y dividiendo las dos ecuaciones resultantes, llegamos a

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}. \quad (3-78)$$

La ecuación (3-77) o la (3-78) nos dan, pues, θ conocida ψ . La solución de la ecuación de Kepler trascendente (3-76) que dé el valor de ψ correspondiente a un tiempo dado constituye un problema que ha llamado la atención de muchos matemáticos famosos desde que Kepler planteó la cuestión a principios del siglo XVII. Por ejemplo, Newton contribuyó con lo que hoy llamaríamos una solución analógica. Verdaderamente, podemos pretender que en la práctica necesitamos resolver la ecuación de Kepler con la aproximación del segundo de arco para toda la gama de excentricidades y ello constituiría el origen de muchos desarrollos de matemática numérica de los siglos XVIII y XIX. En los ejercicios de este capítulo se consideran algunos de los más de cien métodos de solución desarrollados en la época anterior a los ordenadores.

3-9 VECTOR DE LAPLACE-RUNGE-LENZ

El problema de Kepler se distingue también por la existencia de un vector conservativo adicional al momento cinético. En el caso de una fuerza central, la segunda ley de Newton del movimiento se puede escribir vectorialmente en la forma

$$\dot{\mathbf{p}} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3-79)$$

El producto vectorial de $\dot{\mathbf{p}}$ por el vector momento cinético constante \mathbf{L} podrá, por tanto, desarrollarse en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} &= \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] \\ &= \frac{mf(r)}{r} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2 \dot{\mathbf{r}}]. \end{aligned} \quad (3-80)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

ecuación de la órbita que da r en función de θ . Hemos visto que, en general, las órbitas correspondientes a movimientos debidos a fuerzas centrales no suelen ser cerradas; los razonamientos de § 3-6 demostraban que las órbitas cerradas implicaban condiciones un tanto restrictivas impuestas a la forma de la ley de fuerza. Es una propiedad de las órbitas no cerradas que la curva llegará a pasar por un punto (r, θ) arbitrario cualquiera que esté entre las cotas de los puntos de retorno de r . Podemos ver esto intuitivamente partiendo de la naturaleza no cerrada de la órbita; al variar θ a lo largo de todo un ciclo, la partícula no deberá nunca recorrer de nuevo sus pasos sobre ninguna órbita anterior. Así pues, la ecuación de la órbita será tal que r sea una función multiforme de θ (módulo 2π), en realidad es una *función infinitiforme* de θ . La cantidad conservada correspondiente adicional a L y E que define la órbita deberá contener análogamente una función infinitiforme del movimiento de la partícula. Solamente cuando las órbitas sean cerradas o, más generalmente, cuando el movimiento sea *degenerado*, como en el caso del problema de Kepler, podemos esperar que la cantidad conservada adicional sea una función algebraica sencilla de r y p tal como el vector de Laplace-Runge-Lenz. Según estos razonamientos, podríamos esperar que existiera una analogía sencilla de un tal vector para el caso de la ley de Hooke en donde, según hemos visto, las órbitas son también degeneradas. Así sucede, con la diferencia de que la manera natural de formular la constante del movimiento no nos lleva a un vector sino a un tensor de segundo orden (v. § 9-7). Así pues, la existencia de una constante o integral del movimiento, además de E y L , que sea una función algebraica simple de movimiento, es suficiente para indicar que el movimiento es degenerado y las órbitas acotadas cerradas.

3-10 DISPERSIÓN EN UN CAMPO DE FUERZAS CENTRAL

Desde un punto de vista histórico, el interés acerca de las fuerzas centrales surgió en los problemas astronómicos del movimiento planetario. Sin embargo, no hay razón alguna para que sólo las consideremos en ese tipo de problemas; ya hemos mencionado las órbitas en el átomo de Bohr. Otra cuestión que podemos estudiar mediante la Mecánica clásica es la *dispersión* de partículas por campos de fuerzas centrales. Desde luego, si el tamaño de las partículas es de orden atómico, debemos esperar que los resultados específicos de un tratamiento clásico sean a menudo incorrectos desde un punto de vista físico, ya que en tales regiones suelen ser importantes los efectos cuánticos. A pesar de todo, hay muchas predicciones clásicas que siguen siendo válidas con buena aproximación. Más importante aún, los procedimientos de *descripción* de los fenómenos de dispersión son los mismos en la Mecánica clásica que en la cuántica; podemos aprender a hablar el lenguaje igualmente bien basándonos en la Física clásica.

En su formulación para un cuerpo, el problema de la dispersión se ocupa de la desviación de partículas por un *centro de fuerzas*. Consideremos un haz uniforme de partículas —da igual que sean electrones, partículas o planetas— todas de igual masa y energía que inciden sobre un centro de fuerzas. Podemos suponer que la fuerza disminuye tendiendo a cero a grandes distancias. El haz incidente se caracteriza especificando su *intensidad* I (también llamada densidad de flujo), la cual da el número de partículas que atraviesan en unidad de tiempo la unidad de superficie colocada normalmente al haz. Al acercarse una partícula al centro de fuerzas será atraída o repelida y su órbita se desviará



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

o bien

$$\Theta = \pi - 2 \int_0^{u_m} \frac{s du}{\sqrt{1 - \frac{V(u)}{E} - s^2 u^2}} \quad (3-97)$$

Las ecuaciones (3-96) y (3-97) rara vez se utilizan, a no ser en el cálculo numérico directo del ángulo de dispersión. No obstante, cuando se disponga de una expresión analítica para las órbitas, se puede a menudo obtener la relación entre Θ y s casi por simple inspección. Ejemplo históricamente importante de un tal procedimiento lo tenemos en la dispersión repulsiva de partículas cargadas por causa de un campo coulombiano. El campo de fuerzas dispersor es el creado por una carga fija $-Ze$ al ejercerse sobre partículas incidentes que tienen carga $-Z'e$; por tanto, la fuerza se puede escribir en la forma

$$f = \frac{ZZ'e^2}{r^2},$$

es decir, se trata de una fuerza repulsiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Podemos trasladar aquí los resultados de § 3-7 sin mas que escribir la constante de la fuerza en la forma

$$k = -ZZ'e^2. \quad (3-98)$$

La energía E es mayor que cero y la órbita será una hipérbola de excentricidad dada por*

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(ZZ'e^2)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{ZZ'e^2} \right)^2}, \quad (3-99)$$

donde hemos tenido en cuenta la ecuación (3-90). Si se toma igual a π el ángulo θ' de la

* A fin de evitar confusiones con la carga del electrón e , representaremos la excentricidad, momentáneamente, por ϵ .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

cuando $\Theta \rightarrow \Theta_m$. Pero para todos los ángulos mayores la sección eficaz es nula, ya que el ángulo de dispersión no puede ser mayor que Θ_m . El fenómeno de la subida infinita de la sección eficaz seguida de una desaparición brusca es muy parecido a lo que sucede en la Óptica geométrica de la dispersión de la luz solar por las gotas de lluvia. A causa de esta semejanza, el fenómeno se denomina *dispersión en arco iris*.

Los ejemplos presentados hasta ahora corresponden a dispersión puramente repulsiva. Si en la dispersión intervinieran fuerzas atractivas, podrían surgir más complicaciones. El efecto de la atracción sería tirar de la partícula hacia el centro en vez de producir la desviación repulsiva hacia afuera representada en la figura 3-15. En consecuencia, el ángulo Ψ que forma la dirección de incidencia con la dirección del periápside podrá ser mayor que $\pi/2$ y el ángulo de dispersión que da la ecuación (3-94) sería entonces negativo. Esto no constituye, en sí mismo, una gran dificultad ya que claramente es la magnitud de Θ la que interviene en la determinación de la sección eficaz. Ahora bien, en determinadas circunstancias, el ángulo Θ calculado mediante la ecuación (3-96) puede ser mayor que 2π . Es decir, la partícula que sufre dispersión puede dar una o más vueltas alrededor del centro de fuerzas antes de salir finalmente en la dirección desviada.

Para ver físicamente cómo puede suceder esto, consideremos un potencial dispersivo representado esquemáticamente por la curva $s = 0$ de la figura 3-17. Es corriente entre los potenciales intermoleculares que se suponen en muchos problemas de la teoría cinética —potencial atractivo a grandes distancias que disminuye más rápidamente que $1/r^2$ y que a pequeñas distancias se convierte en potencial repulsivo rápidamente creciente. Las otras curvas de la figura 3-17 muestran el potencial unidimensional efectivo $V(r)$, ecuación (3-22'), correspondiente a diversos valores del parámetro de impacto s (o lo que es equivalente: diversos valores de l). Como la barrera centrífuga repulsiva predomina a grandes r para todos los valores de $s > 0$, el potencial equivalente correspondiente a valores pequeños de s presentará una cumbre. Consideremos ahora una partícula que incide con parámetro de impacto s_1 y con la energía E_1 correspondiente al máximo de la cumbre. Según indicamos en § 3-3, la diferencia entre E_1 y $V(r)$ es proporcional al cuadrado de la velocidad radial a esa distancia. Cuando la partícula incidente alcanza la posición r_1 del máximo de V' , la velocidad radial es nula. Recordemos de lo visto en § 3-6 que tenemos aquí las condiciones para órbita circular inestable a la distancia r_1 . En ausencia de toda perturbación, una vez alcanzada r_1 , la partícula que incide con parámetros E_1 y s_1 recorrería indefinidamente un camino circular alrededor del centro de fuerzas a dicha distancia sin salir ya nunca. Para el mismo parámetro de impacto pero con una energía E ligeramente mayor que E_1 , no establecería una órbita circular real. No obstante, cuando la partícula está en la inmediata proximidad de r_1 la velocidad radial sería muy pequeña y la partícula se mantendría en la proximidad de la cumbre un tiempo desproporcionadamente grande. La velocidad angular, $\dot{\theta}$, no estaría de momento afectada por el máximo, estaría dada en r por

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr_1^2} = \frac{s_1}{r_1^2} \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Por tanto, en el tiempo que emplea la partícula en atravesar la región de la cumbre la



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Estos dos ángulos sólo serán iguales si la segunda partícula se mantiene quieta durante el proceso de dispersión. Sin embargo, en general, la segunda partícula, aunque esté en reposo inicialmente, se pone en movimiento a causa de la fuerza mutua que se ejercen entre sí las partículas y según se indica en la figura 3-19, los dos ángulos tendrán en tal caso valores diferentes. Por tanto, el problema de un cuerpo equivalente no da directamente el ángulo de dispersión medido en el sistema de coordenadas del laboratorio.

La relación entre los ángulos de dispersión Θ y ϑ se puede determinar examinando cómo tiene lugar la dispersión en un sistema de coordenadas que se mueva con el centro de masa de ambas partículas. En dicho sistema, la cantidad de movimiento total es, desde luego, nula y las dos partículas se moverán con cantidades de movimiento opuestas de igual módulo. En la figura 3-20 se ilustra la apariencia que el proceso de dispersión presenta a un observador en el sistema del centro de masa. Antes de la dispersión, las partículas se mueven directamente una contra otra; después, se alejan una de otra en sentidos opuestos de una misma dirección. El ángulo Θ que forman las direcciones inicial y final del vector relativo debe, por tanto, ser igual al ángulo de dispersión de una y otra partícula en el sistema del centro de masa. La relación entre los dos ángulos de dispersión Θ y ϑ se podrá, pues, obtener considerando la transformación entre el sistema del centro de masa y el sistema del laboratorio. Conviene aquí utilizar la terminología de § 3-1 con ligeras modificaciones:

\mathbf{r}_1 y \mathbf{v}_1	son los vectores de posición y velocidad, después de la dispersión de la partícula incidente 1 en el sistema del laboratorio,
\mathbf{r}'_1 y \mathbf{v}'_1	son los vectores de posición y velocidad, después de la dispersión, de la partícula 1 en el sistema del centro de masa y
\mathbf{R} y \mathbf{V}	son los vectores de posición y velocidad (constante) del centro de masa en el sistema del laboratorio.

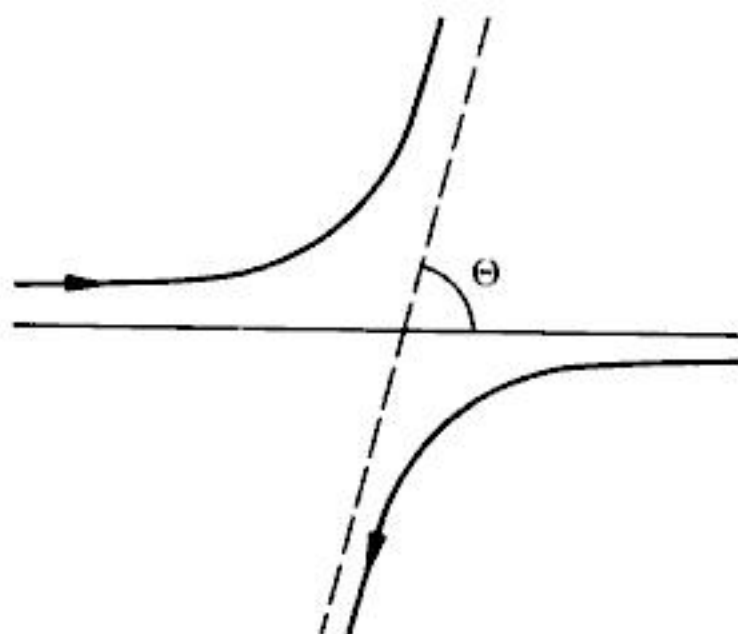


FIGURA 3-20

Dispersión de dos partículas vista en el sistema del centro de masa.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Los ángulos de dispersión ϑ y Θ no sólo tienen, en general, distinto valor, sino que los valores de la sección eficaz diferencial dependen de cuál de los dos ángulos se tome como variable independiente para σ . La relación entre las dos formas funcionales se obtiene a partir de la observación de que en un experimento particular, el número de partículas dispersadas por un elemento de ángulo sólido dado debe ser el mismo tanto si medimos el suceso en función de ϑ como en función de Θ . Este enunciado lo podemos escribir en forma de ecuación de la manera siguiente:

$$2\pi I \sigma(\Theta) \sin \Theta |d\Theta| = 2\pi I \sigma'(\vartheta) \sin \vartheta |d\vartheta|,$$

o sea

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta) \frac{\sin \Theta}{\sin \vartheta} \left| \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right| = \sigma(\Theta) \left| \frac{d(\cos \Theta)}{d(\cos \vartheta)} \right|, \quad (3-115)$$

donde $\sigma'(\vartheta)$ es la sección eficaz diferencial expresada en función del ángulo de dispersión en el sistema del laboratorio. La derivada se puede evaluar fácilmente a partir de la ecuación (3-110) y nos lleva al resultado

$$\sigma'(\vartheta) = \sigma(\Theta) \frac{(1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2)^{3/2}}{1 + \rho \cos \Theta}. \quad (3-116)$$

Quizá deberíamos recalcar que $\sigma(\Theta)$ *no* es la sección eficaz que mediría un observador en el sistema del centro de masa. Tanto $\sigma(\Theta)$ como $\sigma'(\vartheta)$ son secciones eficaces medidas en el sistema del laboratorio; simplemente, están expresadas en función de coordenadas diferentes. Un observador fijo en el sistema del centro de masa vería una densidad de flujo de partículas incidentes distinta de la que se mide en el sistema del laboratorio y habría que incluir esta transformación de la densidad de flujo si (por alguna razón) quisiéramos relacionar las secciones eficaces medidas en uno y otro sistema.

Los dos ángulos de dispersión presentan una relación particularmente sencilla en el caso de dispersión elástica cuando las dos partículas tienen igual masa. Se deduce entonces que $\rho = 1$ y según la ecuación (3-110) tenemos

$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{1 + \cos \Theta}{2}} = \cos \frac{\Theta}{2},$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

físicos simples, desarrolladas de manera histórica. Aun cuando en el desarrollo predominan las palabras sobre las fórmulas, presupone que el lector tenga cierto conocimiento de la teoría de grupos y de la Mecánica cuántica. Ahora bien, es con mucho el mejor repaso de lo que se creía en 1970 que era la relación entre simetrías y degeneraciones. Se describen las simetrías tanto del problema de Kepler como del oscilador armónico, así como las implicaciones del teorema de Bertrand.

R. G. NEWTON, *Scattering Theory of Waves and Particles*. Aun cuando este libro se ocupa principalmente de la teoría cuántica de la dispersión, el Capítulo 5 trata la dispersión de partículas clásicas y realiza un estudio conciso del «movimiento orbital» y las «aureolas», basado en su mayor parte en la publicación fundamental de K. W. Ford y J. A. Wheeler, *Annals of Physics* (N. Y.) **7**, 259 (1959).

EJERCICIOS

1. Una partícula de masa m está obligada a moverse bajo la acción de la gravedad sin rozamiento sobre el interior de un paraboloide de revolución cuyo eje es vertical. Hallar el problema unidimensional equivalente a este movimiento. ¿Qué condición debe cumplir la velocidad inicial de la partícula para producir movimiento circular? Hallar el periodo de las oscilaciones pequeñas respecto a este movimiento circular.

2. Una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales definido por el potencial

$$V = -k \frac{e^{-ar}}{r},$$

donde k y a son constantes positivas. Utilizando el método del potencial unidimensional equivalente, estudiar la naturaleza del movimiento, estableciendo las gamas de l y E apropiadas para cada tipo de movimiento. ¿Cuándo son posibles órbitas circulares? Hallar el periodo de las pequeñas oscilaciones radiales respecto al movimiento circular.

3. Dos partículas se mueven una respecto a otra según órbitas circulares bajo la influencia de fuerzas gravitatorias, con un periodo τ . En un instante dado se detiene bruscamente su movimiento y se sueltan después dejándolas caer una en otra. Demostrar que chocan al cabo de un tiempo $\tau/4\sqrt{2}$.

4. Consideremos un sistema en el cual las fuerzas que se ejerzan sobre las distintas partículas consistan en fuerzas conservativas \mathbf{F}_i' y fuerzas de rozamiento \mathbf{f}_i proporcionales a la velocidad. Demostrar que para tal sistema el teorema del virial puede escribirse en la forma

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \overline{\sum_i \mathbf{F}_i' \cdot \mathbf{r}_i},$$

con lo que el movimiento alcanza un estado estacionario y no puede extinguirse a consecuencia de las fuerzas de rozamiento.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

19. Desarrollando $e \sin \psi$ en serie de Fourier en ωt , demostrar que la ecuación de Kepler tiene la solución formal

$$\psi = \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(ne) \sin n\omega t,$$

donde J_n es la función de Bessel de orden n . Para argumentos pequeños, la función de Bessel se puede aproximar por medio de un desarrollo en serie de potencias del argumento. En consecuencia, deducir de este resultado los primeros términos del desarrollo de ψ en potencias de e . Una buena fuente de información acerca de las propiedades de las funciones de Bessel la tenemos en el «*Handbook of Mathematical Functions*» de Abramowitz y Stegun, especialmente en la página 360.

20. Si representamos por ρ a la diferencia $\psi - \omega t$, podremos escribir la ecuación de Kepler en la forma

$$\rho = e \sin(\omega t + \rho).$$

Se pueden obtener aproximaciones sucesivas a ρ desarrollando $\sin \rho$ en serie de Taylor en ρ y sustituyendo luego ρ por su expresión dada por la ley de Kepler. Demostrar que la primera aproximación a ρ es ρ_1 dada por

$$\operatorname{tg} \rho_1 = \frac{e \sin \omega t}{1 - e \cos \omega t},$$

y que la siguiente aproximación se halla a partir de

$$\sin(\rho_2 - \rho_1) = -e^3 \sin(\omega t + \rho_1)(1 + e \cos \omega t),$$

expresión que es precisa hasta los términos de orden e^4 .

21. El período de la Tierra entre pasos sucesivos por el perihelio («año anomalístico») es de 365,2596 días solares medios y la excentricidad de la órbita es 0,0167504. Suponiendo movimiento en una órbita elíptica kepleriana, ¿qué ángulo llega a moverse la Tierra en la órbita, partiendo del perihelio, en un tiempo igual a un cuarto del año anomalístico? Dar el resultado en grados con una precisión no inferior a un segundo de arco. Puede utilizarse cualquier método, incluido el cálculo numérico con una calculadora o con un ordenador.

22. En el movimiento hiperbólico en un potencial $1/r$ lo análogo de la anomalía excéntrica es F definida por

$$r = a(e \cosh F - 1),$$

donde $a(e - 1)$ es la distancia de mayor aproximación. Hallar lo análogo a la ecuación de Kepler dando t a partir del tiempo de mayor aproximación en función de F .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

b) Se observa que en dispersión elástica la sección eficaz de dispersión es isótropa en función de Θ . ¿Cuáles son las distribuciones de probabilidad correspondientes para la energía dispersada E_1 de la partícula incidente y para la energía de retroceso E_2 de la partícula blanco?

34. Demostrar que el ángulo de dispersión ϑ en el sistema del laboratorio está relacionado con la energía E_0 antes de la dispersión y la energía E_1 después, mediante la ecuación

$$\cos \vartheta = \frac{m_2 + m_1}{2m_1} \sqrt{\frac{E_1}{E_0}} - \frac{m_2 - m_1}{2m_1} \sqrt{\frac{E_0}{E_1}} + \frac{m_2 Q}{2m_1 \sqrt{E_0 E_1}}.$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

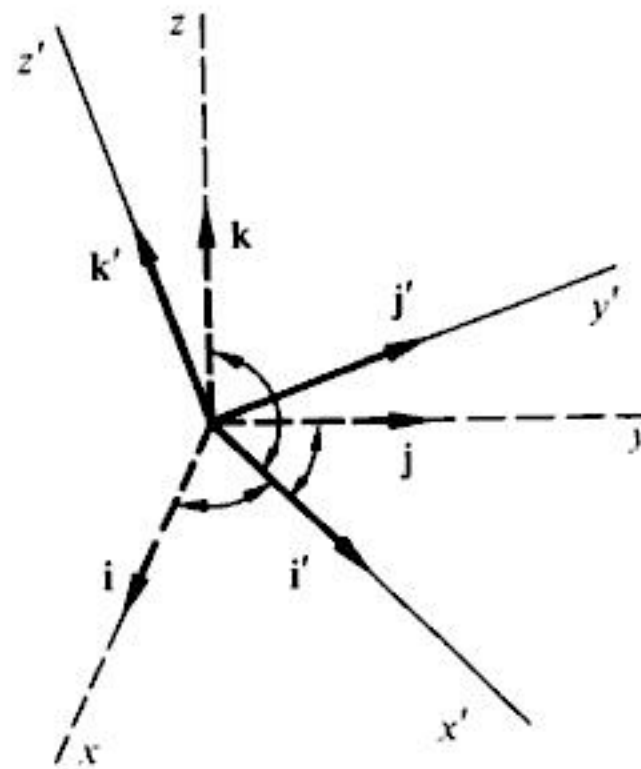


FIGURA 4-3

Cosenos directores del sistema de ejes del cuerpo respecto a un sistema exterior de ejes.

El vector \mathbf{i}' puede expresarse en función de \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} por medio de la relación

$$\mathbf{i}' = (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$

o sea

$$\mathbf{i}' = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}. \quad (4-3)$$

Análogamente, los cosenos directores del eje y' con x , y , z pueden designarse por β_1 , β_2 y β_3 y serán las componentes de \mathbf{j}' en el sistema de referencia sin acento:

$$\mathbf{j}' = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}. \quad (4-4)$$

Para \mathbf{k}' puede escribirse una ecuación análoga a la (4-4), designando por las γ los cosenos directores del eje z' . Estos conjuntos de nueve cosenos directores especifican por completo la orientación de los ejes x' , y' , z' respecto al sistema x , y , z . Podríamos invertir el proceso y utilizar los cosenos directores para expresar los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} en función



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

donde a_{11}, a_{12}, \dots constituyen un conjunto cualquiera de coeficientes constantes (independientes de x, x'). * Para simplificar el aspecto de muchas expresiones haremos también uso del convenio de suma que introdujo Einstein: Siempre que en un término aparezca un índice dos o más veces se entenderá, sin que haya otros símbolos, que hay que sumar el término para todos los valores posibles de dicho índice. Así, las ecuaciones (4-12) podrán escribirse, de acuerdo con este convenio, de la forma más compacta

$$x'_i = a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4-12')$$

La aparición repetida del índice j indica que el segundo miembro de la ecuación (4-12') es una suma extendida al índice mudo j para todos los valores posibles (en este caso, $j = 1, 2, 3$). Puede existir alguna ambigüedad cuando haya potencias de una cantidad con índice y por ello, una expresión del tipo

$$\sum_i x_i^2$$

aparecerá bajo el convenio de suma en la forma

$$x_i x_i.$$

En lo que sigue, se supondrá siempre que aplicamos el convenio de suma al leer las ecuaciones, a menos que se especifique otra cosa. Cuando sea conveniente, o para suprimir ambigüedades, se podrá desarrollar explícitamente, en ocasiones, el símbolo de sumatorio, por ejemplo cuando deban excluirse de la suma ciertos valores del índice.

La transformación representada por las ecuaciones (4-11) sólo es un caso particular de la transformación lineal general (ec. 4-12) ya que los cosenos directores no son todos independientes. Podemos deducir aquí de nuevo las relaciones (4-8) entre los coeficientes, en función de la nueva notación. Como los dos sistemas de coordenadas son cartesianos, el módulo de un vector se da a través de la suma de los cuadrados de sus componentes. Además, como el vector real permanece siempre el mismo independientemente de qué sistema de coordenadas se utilice, el módulo del vector debe ser el mismo en ambos sistemas. En símbolos, la invariancia del módulo la podemos escribir en la forma

$$x'_i x'_i = x_i x_i. \quad (4-13)$$

* Las ecuaciones (4-12) no constituyen, desde luego, el sistema más general de ecuaciones de transformación (cfr. p. ej., los que llevan de las r a las q , ec. 1-38).



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

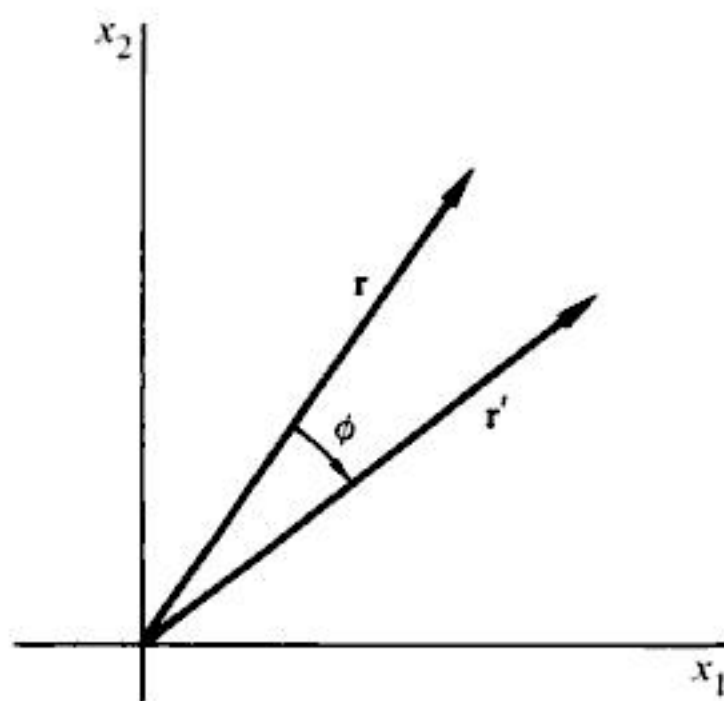


FIGURA 4-5

Interpretación de una transformación ortogonal como rotación del vector, dejando invariado el sistema de coordenadas.

A pesar de esto debemos señalar que, sin cambiar la matemática formal, **A** también puede considerarse que es un operador que actúa sobre el *vector* **r**, transformándolo en otro vector **r'**:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}, \quad (4-19)$$

estando expresados ambos vectores en el mismo sistema de coordenadas. Así, en dos dimensiones, en vez de hacer girar el sistema de coordenadas en sentido antihorario podemos hacer girar el vector **r** en sentido *horario* un ángulo ϕ dando un nuevo vector **r'**. Las componentes del nuevo vector estarán relacionadas con las del antiguo mediante las mismas ecuaciones (4-12) que describen la transformación de las coordenadas. Por tanto, desde un punto de vista formal, no será necesario utilizar el paréntesis en la ecuación (4-18); en vez de ello, podremos escribirla en la forma de la ecuación (4-19) e interpretarla tanto como operación sobre el sistema de coordenadas cuanto como operación sobre el vector. El álgebra sigue siendo la misma independiente de cuál de estos dos puntos de vista sea el que sigamos. La interpretación como operador que actúa sobre las coordenadas será la más pertinente cuando se utilice la transformación ortogonal para especificar la orientación de un cuerpo rígido. En cambio, la noción de operador que transforma un vector en otro es la que tiene una aplicación más amplia. En el tratamiento matemático se empleará libremente una u otra interpretación, según convenga al caso tratado. Desde luego, debemos recalcar que la naturaleza de la operación representada por **A** cambiará según cuál sea la interpretación que tomemos. Así, si **A** corresponde a una rotación *antihoraria* de un ángulo ϕ cuando se aplique al sistema de coordenadas, corresponderá a una rotación de sentido *horario* cuando aplique al vector.

En otros tipos de transformaciones de coordenadas más generales que las transfor-



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Sustituyendo la x_i dada por (4-27) en la ecuación (4-28), ésta queda en la forma

$$x'_k = a_{ki} a'_{ij} x'_j. \quad (4-29)$$

Como las componentes de r' son independientes, la ecuación (4-29) sólo será correcta si la suma se reduce idénticamente a x'_k . Por tanto, el coeficiente x'_j deberá ser 1 para $j = k$ y cero para $j \neq k$; en símbolos,

$$a_{ki} a'_{ij} = \delta_{kj}. \quad (4-30)$$

Vemos fácilmente que el primer miembro de la ecuación (4-30) es el elemento matricial del producto $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$, mientras que el segundo miembro es el elemento matricial de la llamada matriz unidad $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación (4-30) podrá, pues, escribirse en la forma

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}, \quad (4-32)$$

la cual indica la razón de llamar matriz inversa a la \mathbf{A}^{-1} . La transformación correspondiente a $\mathbf{1}$ se denomina *transformación identidad*, la cual no produce cambio alguno en el sistema de coordenadas:

$$\mathbf{x} = \mathbf{1}\mathbf{x}.$$

Análogamente, multiplicando una matriz cualquiera \mathbf{A} por $\mathbf{1}$, en cualquier orden, \mathbf{A} queda inalterada:

$$\mathbf{1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{A}.$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Una matriz cuadrada que sea igual a su traspuesta,

$$A_{ij} = A_{ji},$$

se dice (por razones obvias) que es *simétrica*. Cuando la traspuesta sea la matriz cambiada de signo,

$$A_{ij} = -A_{ji},$$

se dice que la matriz es *antisimétrica* o *hemisimétrica*. Es evidente que en las matrices antisimétricas los elementos de la diagonal principal son todos nulos. En el caso de una matriz cuadrada cualquiera A , la matriz A_s definida por

$$A_s = \frac{1}{2}(A + \tilde{A})$$

es simétrica y podremos definir la matriz antisimétrica

$$A_a = \frac{1}{2}(A - \tilde{A}).$$

Resulta evidente que

$$A = A_s + A_a,$$

y

$$\tilde{A} = A_s - A_a.$$

Asociada a la noción de matriz traspuesta está su compleja conjugada a la que los físicos llaman *matriz adjunta*, la cual se indica mediante un obelisco, \dagger :

$$A^\dagger = (\tilde{A})^* \quad (4.38)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

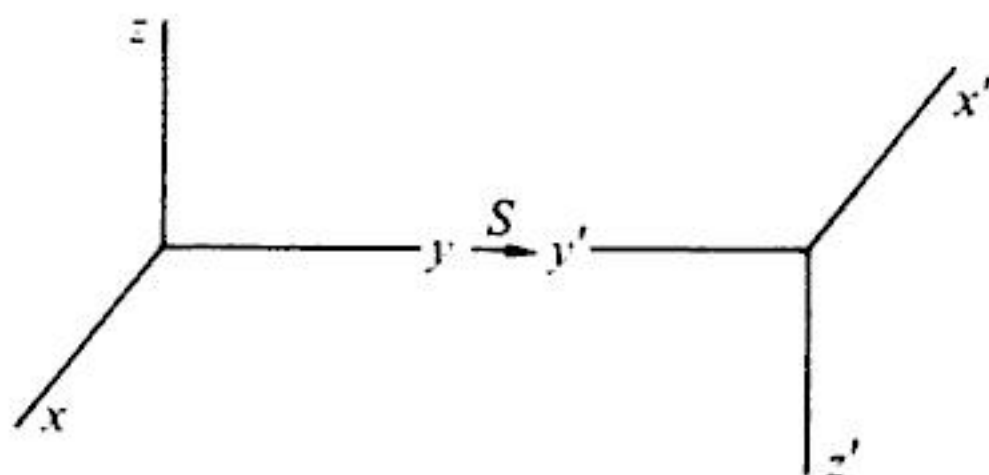


FIGURA 4-6
Inversión de los ejes de coordenadas.

los ejes de coordenadas (cfr. fig. 4-6). Tal operación transforma un sistema de coordenadas dextrogiro en otro levogiro y se denomina *inversión* o *reflexión* de los ejes de coordenadas.

Por la misma naturaleza de esta operación, queda claro que la inversión de un sistema dextrogiro en otro levogiro no puede lograrse mediante ningún cambio *rígido* de orientación de los ejes de coordenadas. Por tanto, una inversión no corresponderá nunca a un desplazamiento físico de un cuerpo rígido. Lo que es cierto para S lo será igualmente para toda matriz cuyo determinante valga -1 , ya que dicha matriz se puede escribir en forma de producto de S por una matriz cuyo determinante valga $+1$ y por tanto incluye la operación de inversión. En consecuencia, no podrá describir un cambio de orientación rígido. Por tanto, las transformaciones que representen el movimiento de un cuerpo rígido deberán limitarse a matrices cuyo determinante valga $+1$. Otro método para llegar a esta conclusión parte del hecho de que la matriz de cambio debe evolucionar de manera continua a partir de la matriz unidad la cual, desde luego, tiene $+1$ por determinante. Sería incompatible con la continuidad del movimiento que el determinante de la matriz cambiase repentinamente, en algún instante, de su valor inicial $+1$ a -1 . Las transformaciones ortogonales con determinante igual a $+1$ se denominan *propias* y las de determinante -1 *impropias*.

Para describir el movimiento de cuerpos rígidos en la formulación de Lagrange de la Mecánica será, pues, necesario buscar tres parámetros independientes que especifiquen la orientación de un cuerpo rígido de tal manera que la matriz ortogonal de cambio correspondiente tenga su determinante igual a $+1$. Tan sólo cuando hayamos encontrado tales coordenadas generalizadas podremos escribir la lagrangiana del sistema y obtener las ecuaciones de Lagrange para el movimiento. En la literatura se han descrito algunos conjuntos de dichos parámetros, si bien el más corriente y útil lo constituyen los *ángulos de Euler*. Vamos a definir estos ángulos y mostrar cómo se pueden expresar en función de ellos los elementos de la matriz ortogonal de cambio.

Podemos efectuar la transformación de un sistema de coordenadas cartesianas a otro por medio de tres rotaciones sucesivas efectuadas en un orden concreto. Se definen entonces los ángulos de Euler como los tres ángulos de rotación sucesivos. Dentro de ciertos



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

La verificación de la multiplicación y la demostración de que A representa una matriz ortogonal propia, se deja como ejercicio.

Notemos que el orden de rotaciones utilizado para definir la orientación final del sistema de coordenadas es, hasta cierto punto, arbitrario. La rotación inicial podría tomarse en torno a uno cualquiera de los tres ejes cartesianos. En las dos rotaciones subsiguientes, la única limitación es que no puede haber dos rotaciones sucesivas en torno a un mismo eje. Por tanto, en la definición de los ángulos de Euler podrá haber un total de doce convenios (en un sistema de coordenadas dextrogiro). Los dos convenios utilizados más frecuentemente sólo difieren en la elección de eje para la segunda rotación. En las definiciones de ángulos de Euler descritas anteriormente, que se utilizarán en todo el libro, la segunda rotación tiene lugar respecto al eje x intermedio. A esta elección la llamaremos *convenio x* . En Mecánica cuántica, Física nuclear y Física de las partículas se acostumbra a tomar la segunda rotación definidora en torno al eje y intermedio* y a esta forma la llamaremos *convenio y* .

En aplicaciones técnicas relativas a la orientación de vehículos en movimiento tales como naves espaciales y satélites se utiliza corrientemente un tercer convenio. Los convenios x e y tienen el inconveniente de que cuando el sistema de coordenadas con acento difiere poco del sistema sin acento, los ángulos ϕ y ψ no pueden distinguirse, ya que entonces sus ejes de rotación respectivos z y z' son casi coincidentes. A fin de salvar este inconveniente se toman las rotaciones en torno a ejes diferentes. La primera rotación tiene lugar en torno al eje vertical y da el ángulo de *guiñada*. La segunda tiene lugar alrededor de un eje perpendicular fijo en el vehículo y normal al eje de figura; la mide el ángulo de *inclinación* o *picado*. Por último, el tercer ángulo es el de rotación en torno al eje de figura del vehículo y es el *ángulo de balanceo*. Como en las rotaciones intervienen los tres ejes, a este convenio se le da el nombre de *convenio xyz* (aun cuando el orden de los ejes pueda ser diferente). A este último convenio se le llama a veces *ángulos de Tait-Bryan*.

Aun cuando en este libro sólo utilizaremos el convenio x , a fin de comprender las referencias se consignan en el Apéndice B todas las fórmulas en que intervienen los ángulos de Euler, tales como las matrices de rotación, según los convenios y y xyz .

4.5 PARÁMETROS DE CAYLEY-KLEIN Y CANTIDADES RELACIONADAS CON ELLOS

Hemos visto que para especificar la orientación de un cuerpo rígido sólo se necesitan tres cantidades independientes. A pesar de todo, hay ocasiones en las que conviene utilizar sistemas de variables que contengan un número mayor que el mínimo de cantidades para describir una rotación aun cuando no sean adecuadas como coordenadas generalizadas. Así, Felix Klein introdujo el sistema de cuatro parámetros que lleva su nombre para facilitar la integración de problemas giroscópicos complicados. Los ángulos de Euler son de difícil utilización en el cálculo numérico a causa del gran número de funciones trigono-

* A este respecto parece haber sido decisivo el empleo de Wigner en *Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* y de Rose en *Elementary Theory of Angular Momentum*.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

donde x', y', z' son cantidades reales. El determinante de P también es invariante ante la transformación de semejanza (4-60), por lo que podremos escribir la igualdad siguiente:

$$|P| = -(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2) = |P'|.$$

Podemos darnos cuenta de que este resultado constituye la condición de ortogonalidad; exige que la longitud del vector $r = xi + yj + zk$ permanezca invariable en la transformación. A cada matriz unitaria Q en el espacio bidimensional complejo, corresponde una transformación ortogonal real en el espacio tridimensional ordinario.

Las consideraciones siguientes nos ayudan a penetrar en la naturaleza de esta asociación. Designemos por B la matriz ortogonal real que hace pasar de las coordenadas x a las x' .

$$x' = Bx,$$

y denotemos por Q_1 la matriz unitaria asociada,

$$P' = Q_1 P Q_1^\dagger.$$

Con la matriz A podemos realizar una segunda transformación ortogonal de x' a x'' ,

$$x'' = Ax',$$

con la matriz asociada Q_2 ,

$$P'' = Q_2 P' Q_2^\dagger.$$

Ahora bien, la transformación directa de x a x'' la da la matriz C definida por

$$C = AB.$$

Correspondientemente, la transformación directa de P a P'' la efectuará una transformación de semejanza con cierta matriz Q_3 , que debe por tanto estar asociada a C . No



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

(El por qué de esta elección aparentemente rara de símbolos se aclarará más adelante, cfr. 213). En función de estas cuatro cantidades reales, la condición determinante dada por la ecuación (4-58) queda en la forma

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (4-66)$$

Con una transformación algebraica sencilla se ve que la matriz **A** dada por la ecuación (4-64) se puede escribir en función de los cuatro parámetros reales en la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4-67)$$

Queda ahora claro que los elementos matriciales son reales.† También puede ponerse fácilmente de manifiesto que la matriz **A** en función de estos parámetros no se puede poner en la forma de la transformación de inversión **S**. El examen de los elementos no diagonales y de sus traspuestos indica que se anulan todos si se anulan al menos tres de los parámetros. Entonces no se puede tomar el parámetro restante no nulo de manera que los tres elementos diagonales (o sólo uno de ellos) valgan -1 . Por tanto, la representación de **A** mediante la ecuación (4-64) o la (4-67) no podrá describir una inversión de coordenadas ni ninguna transformación ortogonal impropia. Los parámetros de Cayley-Klein se pueden expresar en función de los ángulos de Euler correspondientes; si hay necesidad, por comparación directa de los elementos de la ecuación (4-64) con los elementos expresados en función de ϕ , θ y ψ . No obstante, resulta más sencillo e instructivo construir primeramente las matrices **Q** correspondientes a las rotaciones sucesivas separadas que definen los ángulos de Euler y luego combinarlas para formar la matriz completa. Así, el ángulo ϕ se ha definido mediante una rotación en torno al eje z , donde la transformación, en función de x_+ , x_- y z aparece en la forma

$$x'_+ = e^{-i\phi} x_+$$

$$x'_- = e^{i\phi} x_-$$

$$z' = z.$$

† A los cuatro parámetros reales e_0, e_1, e_2, e_3 (o ligeras variantes de los mismos) se les da a veces en la literatura el nombre de parámetros de Cayley-Klein, si bien lo más correcto históricamente es llamarles *parámetros de Euler*.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

las matrices de giro de Pauli constituyen un sistema de cuatro matrices independientes. En consecuencia, toda matriz 2×2 que contenga cuatro cantidades independientes se podrá expresar en forma de función lineal de ellas. Así, expresada en función de los parámetros de Euler, la matriz \mathbf{Q} se podrá escribir en la forma

$$\mathbf{Q} = e_0 \mathbf{1} + i(e_1 \sigma_1 + e_2 \sigma_2 + e_3 \sigma_3), \quad (4-74)$$

forma que empieza a explicar por qué se han elegido esos símbolos para los parámetros.† Las matrices \mathbf{Q} para una rotación en torno a un eje de coordenadas se pueden expresar en función de las σ de manera particularmente sencilla. Por ejemplo, la \mathbf{Q}_θ para la rotación alrededor del eje x (ec. 4-69) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{Q}_\theta = \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{2} + i \sigma_1 \sin \frac{\theta}{2}. \quad (4-75)$$

Análogamente, la matriz \mathbf{Q}_ϕ para la rotación alrededor del eje z tiene la forma

$$\mathbf{Q}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\phi}{2} - i \sin \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{1} \cos \frac{\phi}{2} + i \sigma_3 \sin \frac{\phi}{2}, \quad (4-76)$$

y puede compararse directamente que una rotación alrededor del eje y tiene la misma forma matricial que en (4-76) sustituyendo σ_3 por σ_2 . Todas las matrices de rotación elemental vienen, pues, dadas por expresiones análogas que sólo contienen la matriz unidad y la matriz σ correspondiente. Por tanto, cada una de las matrices de giro de Pauli está asociada a la rotación en torno a un eje particular y puede pensarse que es el *girador unidad* para dicho eje.

Haciendo uso de las propiedades de multiplicación de las matrices de giro de Pauli, puede demostrarse (cfr. Ejercicio 13) que la matriz de rotación elemental \mathbf{Q}_θ dada por la

† El perito en Matemática un tanto arcaica reconocerá en la ecuación (4-74) una matriz cuaternio, cantidad inventada en 1843 por Sir William R. Hamilton. Aquí e_0 es el escalar (cuaternio) y la cantidad entre paréntesis es el vector del cuaternio.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

ponentes X, Y, Z del vector propio \mathbf{R} . Como tales, nunca podrán dar valores definidos de las tres componentes sino sólo cocientes entre las componentes. Físicamente, esto corresponde a la circunstancia de que sólo puede fijarse la *dirección* del vector propio; su módulo queda indeterminado. El producto de una constante por un vector propio es otro vector propio. En todo caso, por ser homogéneas, las ecuaciones (4-81) sólo pueden tener solución cuando sea nulo el determinante de los coeficientes:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4-82)$$

La ecuación (4-82) se denomina ecuación *característica* o ecuación *secular* de la matriz, y los valores de λ para los cuales se satisface la ecuación son los valores propios buscados. El teorema de Euler se reduce a decir que para las matrices ortogonales reales consideradas, la ecuación secular debe tener la raíz $\lambda = +1$.

En general, la ecuación secular tendrá tres raíces a las que corresponderán tres vectores propios. Por ser más conveniente, en lo que sigue utilizaremos la notación X_1, X_2, X_3 en vez de la X, Y, Z . Con dicha notación, las componentes de los vectores propios las representaremos por X_{ik} , donde el primer subíndice indica la componente particular y el segundo de cuál de los tres vectores propios se trata. Entonces, podremos representar un elemento genérico del grupo de ecuaciones (4-81) escribiendo (con sumatorio explícito)

$$\sum_j a_{ij} X_{jk} = \lambda_k X_{ik}$$

o bien

$$\sum_j a_{ij} X_{jk} = \sum_j X_{ij} \delta_{jk} \lambda_k. \quad (4-83)$$

Los dos miembros de la ecuación (4-83) tienen la forma de producto de matrices; el primer miembro es el producto de \mathbf{A} por una matriz \mathbf{X} que tenga por elementos X_{ik} y el segundo miembro es el producto de \mathbf{X} por una matriz cuyo elemento jk -ésimo es $\delta_{jk} \lambda_k$. La última matriz es diagonal y los elementos de su diagonal son los valores propios de \mathbf{A} . Por tanto, a esta matriz la designaremos por λ :

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (4-84)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

La traza de \mathbf{A}' es, simplemente,

$$1 + 2 \cos \Phi.$$

Como la traza es siempre invariante ante una transformación de semejanza, la traza de \mathbf{A} respecto a todo sistema de coordenadas inicial deberá tener la misma forma

$$\text{Tr } \mathbf{A} = a_{ii} = 1 + 2 \cos \Phi, \quad (4-91)$$

que nos da el valor de Φ en función de los elementos de la matriz. El ángulo de rotación Φ debe identificarse también con el ángulo de fase de los valores propios complejos λ , ya que la suma de los valores propios es precisamente la traza de \mathbf{A} en su forma diagonal (ec. 4-84). En virtud del teorema de Euler y de las propiedades de los valores propios, dicha suma vale

$$\text{Tr } \mathbf{A} = \sum_i \lambda_i = 1 + e^{i\Phi} + e^{-i\Phi} = 1 + 2 \cos \Phi.$$

Vemos que los casos en los cuales todos los valores propios son reales son, en realidad, casos particulares de \mathbf{A} en los que los valores propios sean complejos. Cuando todos los λ_i valgan $+1$ tenemos un ángulo de rotación $\Phi = 0$ (transformación identidad), mientras que el caso en el cual haya un valor propio doble -1 corresponde a $\Phi = \pi$, según ya dijimos.

Los preceptos referentes a la dirección del eje de rotación y al ángulo de rotación no carecen de ambigüedad. Evidentemente, si es \mathbf{R} un vector propio, también lo será $-\mathbf{R}$, ya que no se especifica el sentido de la dirección del eje de rotación. Además, $-\Phi$ satisface la ecuación (4-91) si la satisface Φ . Está claro que la solución de valores propios no fija unívocamente la matriz de transformación ortogonal \mathbf{A} . De la ecuación secular en forma de determinante (ec. 4-82) se deduce que la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ tiene los mismos valores y vectores propios que \mathbf{A} . No obstante, las ambigüedades se pueden mejorar asignando Φ a \mathbf{A} y $-\Phi$ a \mathbf{A}^{-1} , y fijando el sentido de los ejes de rotación mediante la regla del tornillo a derechas.

Por último, debemos mencionar un corolario inmediato del teorema de Euler llamado a veces

Teorema de Chasles: *el corrimiento más general de un cuerpo rígido es una traslación más una rotación.*

La demostración detallada la vamos a dejar. Simplemente, suprimiendo la ligadura al movimiento con un punto fijo se introducen tres grados de libertad de traslación para el



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

por la ecuación (4-93) coinciden con los parámetros de Euler introducidos en §(4-5) (de aquí la elección de la notación). La ecuación (4-94) es, pues, la misma que la condición (4-66).

La identificación de los parámetros de Euler nos permite ahora expresar muchos resultados anteriores en función del ángulo de rotación y de la dirección del eje de rotación. Así, la primera de las ecuaciones (4-72') combinada con la ecuación (4-93) nos da de manera inmediata el ángulo de rotación en función de los ángulos de Euler:

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \cos \frac{\phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (4-97)$$

Desde luego, este resultado también puede obtenerse, con ayuda de la Trigonometría, a partir de la traza de la matriz \mathbf{A} (ec. 4-46). La matriz unimodular 2×2 \mathbf{Q} , homomorfa con la matriz de rotación \mathbf{A} , también puede escribirse en función de los parámetros de la rotación, partiendo de la ecuación (4-74) escrita en la forma

$$\mathbf{Q} = e_0 \mathbf{1} + i \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

En virtud de la ecuación (4-93), \mathbf{Q} aparece también en la forma

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} \cos \frac{\Phi}{2} + i \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\Phi}{2}. \quad (4-98)$$

La ecuación (4-98) es la generalización inmediata de la ecuación (4-75) a un eje de rotación arbitrario y se podría haber obtenido a partir de ella mediante un cambio de coordenadas adecuado. De manera semejante, la analogía correspondiente a la ecuación (4-77), la representación exponencial de \mathbf{Q}_θ , es

$$\mathbf{Q} = e^{i \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} (\Phi/2)}, \quad (4-99)$$

con las mismas consideraciones en lo que se refiere al significado de la exponencial de una matriz.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Como los elementos diagonales de una matriz antisimétrica son necesariamente nulos, en toda matriz antisimétrica 3×3 sólo podrá haber tres elementos distintos. Por tanto, no se pierde generalidad al escribir ϵ en la forma

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4-105)$$

Las tres cantidades $d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3$ está claro que deben identificarse con los tres parámetros independientes que especifican la rotación. Vamos a demostrar que estas tres cantidades constituyen también las componentes de un tipo particular de vector. En virtud de la ecuación (4-102), el *cambio* de las componentes de un vector ante la transformación infinitesimal del sistema de coordenadas puede expresarse mediante la ecuación matricial

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} \equiv d\mathbf{x} = \epsilon \mathbf{x}, \quad (4-106)$$

que en forma desarrollada, con ϵ dada por (4-105), queda en la forma

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 d\Omega_3 - x_3 d\Omega_2 \\ dx_2 &= x_3 d\Omega_1 - x_1 d\Omega_3 \\ dx_3 &= x_1 d\Omega_2 - x_2 d\Omega_1. \end{aligned} \quad (4-107)$$

El segundo miembro de cada una de las ecuaciones (4-107) tiene la forma de una componente del producto vectorial del vector \mathbf{r} por un vector $d\boldsymbol{\Omega}$ que tenga por componentes $^\dagger d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3$. Podemos por tanto escribir las ecuaciones (4-107) en la forma equivalente

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r} \times d\boldsymbol{\Omega}. \quad (4-108)$$

[†] No podemos insistir demasiado en que $d\boldsymbol{\Omega}$ no sea la diferencial de un vector. La combinación $d\boldsymbol{\Omega}$ representa un vector diferencial, es decir, un vector de módulo diferencial. Lamentablemente, la notación sólo aplica la característica de vector a $\boldsymbol{\Omega}$, pero debe quedar claro al lector que no existe ningún vector del cual $d\boldsymbol{\Omega}$ represente la diferencial. Según hemos visto, una rotación finita *no puede* representarse por un solo vector.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

ijk , mientras que valdrá $+1$ ó -1 según que ijk sea una permutación par o impar de 1, 2, 3. Así pues, en función del símbolo de permutación, la ecuación (4-113) de las componentes de un producto vectorial puede escribirse en la forma

$$C_i = \epsilon_{ijk} D_j F_k \quad (4-113')$$

(donde hemos utilizado el habitual convenio de suma). Además, la fórmula de la rotación (4-96) en función de los parámetros de Euler se puede escribir en la forma

$$x'_i = x_i(e_0^2 - e_k e_k) + 2e_i e_j x_j + 2\epsilon_{ijk} e_0 x_j e_k, \quad (4-114)$$

donde la suma se extiende a los valores 1, 2, 3 para los índices que se repiten. Los elementos de la matriz ortogonal de transformación A pueden ahora expresarse de manera inmediata en función de los parámetros de Euler, atendiendo al coeficiente de x_j en la ecuación (4-114):

$$a_{ij} = \delta_{ij}(e_0^2 - e_k e_k) + 2e_i e_j + 2\epsilon_{ijk} e_0 e_k. \quad (4-115)$$

Fácil es ver que esta fórmula tan compacta describe en verdad todos los elementos matriciales de la ecuación (4-67).

Las descripciones de rotación presentadas hasta ahora en este capítulo se han desarrollado a fin de representar la orientación de un cuerpo rígido. Se ha hecho resaltar que las transformaciones comportan en primer lugar la rotación del *sistema de coordenadas*. La interpretación «activa» correspondiente de la rotación de un vector en un sistema de coordenadas fijo implica, pues, una rotación en sentido opuesto, es decir, en sentido horario. Pero para tal cuestión existen muchas zonas de la Mecánica o de la Física general en las que nos ocupamos de los efectos de la rotación del *sistema físico* y de los vectores a él asociados. Ya hemos señalado (§ 2-6) la relación existente entre la invariancia del sistema en rotación y la conservación del momento cinético. En dichas aplicaciones es necesario considerar las consecuencias de la rotación de vectores en el sentido antihorario usual. A fines de referencia, vamos a consignar aquí algunas fórmulas de rotación vistas anteriormente, pero para rotación de vectores en sentido antihorario. *Todas las ecuaciones y enunciados desde aquí hasta el final del apartado sólo son aplicables a dichas rotaciones antihorarias.*

La fórmula (4-92) para la rotación se convierte en

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})[1 - \cos \Phi] + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \Phi, \quad (4-92')$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Al irse moviendo el cuerpo, variarán las componentes G_j así como los elementos a_{ji} de la matriz de cambio. Luego la variación de G_i en un elemento de tiempo dt es

$$dG_i = a_{ji} dG'_j + da_{ji} G'_j. \quad (4-122)$$

Sin que se pierda por ello generalidad, podemos tomar los ejes del espacio y del cuerpo coincidentes instantáneamente en el tiempo t . Por tanto, las componentes en ambos sistemas serán instantáneamente iguales, si bien las diferenciales *no* serán iguales ya que los dos sistemas están en movimiento uno respecto a otro. Así pues, $G'_j = G_j$ pero $a_{ji} dG'_j = dG'_i$, en donde el acento recalca que la diferencial se mide en el sistema de ejes del cuerpo. La variación de la matriz A en el tiempo dt será, pues, una variación respecto a la matriz unidad y por tanto corresponde a la matriz ϵ de la rotación infinitesimal. Luego

$$da_{ji} = (\tilde{\epsilon})_{ij} = -\epsilon_{ij},$$

utilizando la propiedad de ser ϵ antisimétrica. Poniéndolos en función del símbolo de permutación ϵ_{ijk} , los elementos de ϵ son tales que (cfr. ec. 4-105)

$$-\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ijk} d\Omega_k = \epsilon_{ikj} d\Omega_k.$$

Podemos ahora escribir la ecuación (4-122) en la forma

$$dG_i = dG'_i + \epsilon_{ikj} d\Omega_k G_j.$$

Démonos cuenta de que el último término del segundo miembro es la expresión de la componente i -ésima de un producto vectorial, por lo que la expresión final de la relación entre diferenciales en ambos sistemas es

$$dG_i = dG'_i + (d\Omega \times G)_i, \quad (4-123)$$

que coincide con la componente i -ésima de la ecuación (4-119).

La ecuación (4-119) no es tanto una ecuación acerca de un vector particular G como un enunciado de la transformación de la derivada temporal de un sistema de coordenadas a otro. La naturaleza arbitraria del vector G utilizado en la deducción se puede poner de relieve escribiendo la ecuación (4-120) en forma de operador que actúe sobre un vector



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

El primer paréntesis de esta expresión da la velocidad angular relativa al radio vector respecto al Sol. La cantidad del segundo paréntesis es el cociente entre el número de días sidéreos de un año y el número correspondiente de días solares. Es el factor de corrección para dar la velocidad angular relativa a las estrellas fijas. Con este valor de ω y siendo r igual al radio ecuatorial, la aceleración centrípeta máxima será

$$\omega^2 r = 3,38 \text{ cm/s}^2 \quad ,$$

o sea, un 0,3% de la aceleración de la gravedad. Aun siendo pequeña, esta aceleración no es despreciable. No obstante, los efectos medidos de la gravedad representan la combinación del campo gravitatorio de la distribución de masa de la Tierra y los efectos de la aceleración centrípeta. Se acostumbra a hablar de la suma de ambos llamándole campo de la *gravedad* terrestre, para distinguirla de su campo *gravitatorio*.

La situación la complica aún más el efecto de la aceleración centrípeta que achata a la Tierra en su rotación. Si la Tierra fuese completamente fluida, el efecto de la rotación sería deformarla dándole forma de elipsoide cuya forma fuese la de una superficie equipotencial del campo de la gravedad combinado. El nivel de los mares de la Tierra se adapta muy aproximadamente a este elipsoide de equilibrio (salvo las variaciones locales de vientos y mareas) y define lo que se llama el *geoide* de la Tierra. Salvo en lo que se refiere a perturbaciones locales, la fuerza de la gravedad será perpendicular a la superficie equipotencial del geoide. En consecuencia, la vertical local será, por definición, la dirección perpendicular al geoide en el punto dado de la superficie. Para los fenómenos que tienen lugar en la proximidad de un punto particular de la superficie terrestre, los términos de aceleración centrípeta de la ecuación (4-129) pueden considerarse incluidos en la aceleración de la gravedad g , que estará orientada según la dirección de la vertical local. El módulo de g varía, desde luego, con la latitud terrestre. Los efectos de la aceleración centrípeta y del achatamiento de la Tierra se combinan para hacer que g sea aún 0,53% menor en el Ecuador que en los Polos.

Incidentalmente, la fuerza centrífuga que se ejerce sobre una partícula a causa de la revolución de la Tierra alrededor del Sol es apreciable frente a la gravedad, pero está equilibrada casi totalmente por la atracción gravitatoria del Sol. Desde luego, este equilibrio entre la fuerza centrífuga y la atracción gravitatoria es lo que mantiene a la Tierra (y a todo lo que está sobre ella) en órbita alrededor del Sol.

La fuerza de Coriolis que se ejerce sobre una partícula en movimiento es perpendicular a ω y a v .* En el hemisferio norte, en donde ω sale del suelo, la fuerza de Coriolis, $2m(v \times \omega)$ tiende a desviar a un proyectil disparado a lo largo de la superficie terrestre hacia la derecha de su dirección de movimiento; cfr. fig. 4-12. La desviación de Coriolis tiene sentido opuesto en el hemisferio sur y es nula en el ecuador, donde ω es horizontal. El módulo de la aceleración de Coriolis es siempre menor que

$$2\omega v \simeq 1,5 \times 10^{-4} v,$$

* De ahora en adelante, suprimiremos el subíndice r de v ya que tomaremos todas las velocidades respecto a los ejes de coordenadas en rotación.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Con estos valores, se puede integrar fácilmente la ecuación (4-131) y da la desviación

$$x = \frac{\omega g}{3} t^3 \operatorname{sen} \theta$$

o sea

$$x = \frac{\omega}{3} \sqrt{\frac{(2z)^3}{g}} \operatorname{sen} \theta.$$

Podemos obtener el orden de magnitud de la desviación suponiendo $\theta = \pi/2$ (que corresponde al Ecuador) y $z = 100$ m. La desviación será entonces, aproximadamente,

$$x \simeq 2,2 \text{ cm.}$$

El experimento real es difícil de efectuar, pues la pequeña desviación puede quedar frecuentemente enmascarada por los efectos de las corrientes de aire, la viscosidad u otras influencias perturbadoras.*

Más fácil de observar es el conocido experimento del péndulo de Foucault. Si se pone en oscilación un péndulo en el polo norte en un plano dado del espacio, la componente normal al plano de su cantidad de movimiento es nula y seguirá oscilando en este plano invariable mientras la Tierra gira bajo él. Para un observador en la Tierra, el plano de oscilación parece dar una vuelta por día. En otras latitudes, el resultado es más complicado pero el fenómeno es cualitativamente el mismo y dejamos como ejercicio el cálculo detallado.

También en Física atómica aparecen efectos debidos a los términos de Coriolis. Así, en las moléculas poliatómicas pueden coexistir dos tipos de movimiento: la molécula *gira* como conjunto rígido y los átomos *vibran* alrededor de sus posiciones de equilibrio. Estas vibraciones hacen que los átomos tengan movimiento relativo al sistema de coordenadas giratorio de la molécula. El término de Coriolis será, pues, distinto de cero y hará que los átomos se muevan en una dirección perpendicular a las oscilaciones originales. De esta manera, las perturbaciones de los espectros moleculares a causa de las fuerzas de Coriolis aparecen en forma de interacciones entre los niveles de rotación y de vibración de la molécula.

* Es fácil demostrar, utilizando la ecuación (4-131), que una partícula lanzada hacia arriba caerá al suelo al oeste del punto de lanzamiento inicial.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

8. Si A es la matriz de una rotación de 180° alrededor de un eje cualquiera, demostrar que si

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm A),$$

será $P_{\pm}^2 = P_{\pm}$. Obtener los elementos de P_{\pm} en un sistema adecuado cualquiera y hallar una interpretación geométrica de la operación P_{+} y P_{-} sobre un vector cualquiera F .

9. Expresar la ligadura de «rotadura» de una esfera sobre una superficie plana en función de los ángulos de Euler. Demostrar que las condiciones no son integrables y que, por tanto, la ligadura no es holonoma.

10. a) Demostrar que la matriz rotación en la forma de la ecuación (4-67) no puede ponerse en la forma de la matriz de la transformación inversión S .

b) Comprobar por multiplicación directa que la matriz de la ecuación (4-67) es ortogonal.

11. Demostrar que toda rotación puede representarse por reflexión sucesiva en dos planos que pasen ambos por el eje de rotación formando entre ellos un ángulo plano de $\Phi/2$.

12. Si B es una matriz cuadrada y A es la exponencial de B , definida por el desarrollo en serie de la exponencial,

$$A \equiv e^B = 1 + B + \frac{1}{2}B^2 + \cdots + \frac{B^n}{n!} + \cdots,$$

probar las siguientes propiedades:

a) $e^B e^C = e^{B+C}$ con tal que B y C conmuten.

b) $A^{-1} = e^{-B}$

c) $e^{CBC^{-1}} = CAC^{-1}$

d) A es ortogonal si B es antisimétrica.

e) e^{iB} es unitaria si B es hermitica.

13. Demostrar que Q_θ se puede escribir simbólicamente en la forma

$$Q_\theta = e^{i\sigma_1(\theta/2)}$$

donde la exponencial representa su desarrollo en serie, cuyo primer término es 1.

14. a) Demostrar que las tres matrices spin de Pauli anticonmutan entre si, es decir, que

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i, \quad i \neq j$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

de acuerdo con dicha división: las tres coordenadas cartesianas de un punto fijo del cuerpo rígido para describir el movimiento de traslación y por ejemplo, los tres ángulos de Euler para el movimiento alrededor del punto. Si, además, tomamos el centro de masa como origen del sistema del cuerpo, en la ecuación (1-28) el momento cinético total se divide naturalmente en contribuciones por parte de la traslación del centro de masa y de la rotación alrededor del centro de masa. El primer término sólo contendrá las coordenadas cartesianas del centro de masa y el último sólo las coordenadas angulares. Según la ecuación (131) podemos efectuar una división análoga para la energía cinética total T , la cual puede escribirse en la forma

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + T'(\phi, \theta, \psi),$$

que es la suma de la energía cinética de todo el cuerpo como si estuviera concentrado en el centro de masa, más la energía cinética del movimiento alrededor del centro de masa.

A menudo, la energía potencial se puede dividir análogamente, interviniendo en cada término sólo uno de los conjuntos de coordenadas: el traslatorio o el rotatorio. Así, la energía potencial en un campo gravitatorio uniforme sólo dependerá de la coordenada cartesiana vertical del centro de gravedad.* O si la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo se debe a un campo magnético uniforme \mathbf{B} que actúa sobre su momento dipolar magnético \mathbf{M} , la energía potencial será proporcional a $\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$, en donde sólo interviene la orientación del cuerpo. Casi todos los problemas resolubles en la práctica permiten, ciertamente, una tal separación. En tal caso, el problema mecánico total se desdobra en dos, ya que la lagrangiana, $L = T - V$, se divide en dos partes, una que sólo contiene las coordenadas de traslación y la otra sólo las angulares. Estos dos grupos de coordenadas estarán totalmente separados y se podrán resolver independientemente uno de otro los problemas traslatorio y rotatorio. Por tanto, importará obtener expresiones del momento cinético y de la energía cinética del movimiento alrededor de un punto fijo del cuerpo. Para ello utilizaremos frecuentemente la ecuación (4-124) que relaciona derivadas relativas a un sistema de coordenadas fijo en cierto punto del cuerpo rígido. Es intuitivamente evidente que el ángulo de rotación del desplazamiento de un cuerpo rígido, así como también el vector velocidad angular instantánea, es independiente de la elección del origen del sistema de ejes del cuerpo. La esencia de la ligadura del cuerpo rígido es que todas sus partículas se mueven y giran juntas. No obstante, podemos construir fácilmente una demostración formal. Sean \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 los vectores de posición, respecto a un sistema de coordenadas fijo, de los orígenes de dos sistemas de coordenadas solidarios al cuerpo (cfr. fig. 5-1). Representaremos por \mathbf{R} al vector diferencia:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}.$$

* Desde luego, el centro de gravedad coincide con el centro de masa en un campo gravitatorio uniforme.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

coordenadas por x_j , $j = 1, 2, 3$, el elemento matricial I_{jk} se podrá escribir en la forma

$$I_{jk} = \int_V \rho(\mathbf{r})(r^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV. \quad (5-8)$$

Hasta ahora no hemos especificado qué sistema de coordenadas se ha utilizado para definir las componentes de \mathbf{L} . De ahora en adelante, será conveniente tomarlo fijo en el cuerpo.* Las distintas distancias x_i, y_i, z_i serán, entonces, constantes en el tiempo, con lo que los elementos matriciales serán análogamente constantes, peculiares del cuerpo en cuestión, y dependerán del origen y orientación del sistema de ejes del cuerpo elegido en el cual se expresen aquéllas.

Las ecuaciones (5-5) que relacionan las componentes de \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$ pueden resumirse mediante una sola ecuación con operador,

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \quad (5-9)$$

donde el símbolo \mathbf{I} representa el operador cuyos elementos matriciales son los coeficientes de inercia que aparecen en las ecuaciones (5-5). De las dos interpretaciones que hemos dado al operador de una transformación lineal (cfr. § 4-2), está claro que aquí debemos considerar que \mathbf{I} actúa sobre el vector $\boldsymbol{\omega}$ y no sobre el sistema de coordenadas. Los vectores \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$ son dos vectores físicamente diferentes, que tienen dimensiones diferentes y no son simplemente un mismo vector expresado en dos sistemas de coordenadas diferentes. A diferencia del operador de rotación, \mathbf{I} tendrá dimensiones —masa por cuadrado de una longitud— y no está restringido por condiciones de ortogonalidad. La ecuación (5-9) debe leerse diciendo que el operador \mathbf{I} al actuar sobre el vector $\boldsymbol{\omega}$ da lugar al vector \mathbf{L} que es físicamente nuevo. Aunque haremos uso de las técnicas del Álgebra de matrices desarrolladas en el estudio del operador rotación, ahora hemos de prestar mucha atención a la naturaleza y al carácter físico del operador en sí. No obstante, deberemos estudiar antes alguna Matemática preliminar. Los que ya estén familiarizados con los tensores y afinores pueden pasar ya directamente al § 5-3.

5-2 TENSORES Y AFINORES

Podemos considerar que la cantidad \mathbf{I} define el cociente entre \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{L}}{\boldsymbol{\omega}},$$

* En el Capítulo 4, a un tal sistema lo denotábamos con acentos. Como rara vez vamos a utilizar componentes según los ejes del espacio, de ahora en adelante prescindiremos de dicho convenio a fin de simplificar la notación. A menos que especifiquemos otra cosa, las coordenadas que utilizaremos en el resto del capítulo se referirán a sistemas fijos en el cuerpo rígido.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

hemos visto que el producto interior de una diada o de un afinor por un vector da lugar a un nuevo vector, de igual manera que el producto de \mathbf{l} por $\boldsymbol{\omega}$ da \mathbf{L} . Por tanto, el afinor es, en todos los aspectos, equivalente a un tensor de segundo orden.

Un afinor útil es el afinor $\mathbf{1}$, definido por la representación nonion

$$\mathbf{1} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}. \quad (5-15)$$

La designación es verdaderamente acertada, ya que la matriz de $\mathbf{1}$ es exactamente la matriz unidad y la multiplicación directa muestra que

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{A}.$$

5-3 TENSOR DE INERCIA Y MOMENTO DE INERCIA

Considerada como operador lineal que transforma $\boldsymbol{\omega}$ en \mathbf{L} , la matriz \mathbf{l} tiene elementos que se comportan de igual manera que los elementos de un tensor de segundo orden. Podemos, pues, identificar la cantidad \mathbf{l} con un tensor de segundo orden que suele llamarse *tensor momento de inercia* o más brevemente *tensor de inercia*. Puede escribirse simplemente en forma del afinor

$$\mathbf{l} = m_i(r_i^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i), \quad (5-16)$$

ya que entonces

$$\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} = m_i(r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})) = \mathbf{L},$$

en concordancia con la ecuación (5-3). La ventaja de utilizar para \mathbf{l} la forma de afinor es que siguen pudiéndose emplear los métodos conocidos de manipulación de los vectores. De esta manera llegamos, de manera natural, a expresar la energía cinética de rotación en función del afinor \mathbf{l} . La energía cinética del movimiento alrededor de un punto es

$$T = \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

donde \mathbf{v}_i es la velocidad de la partícula i -ésima relativa al punto fijo medida en los ejes del



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

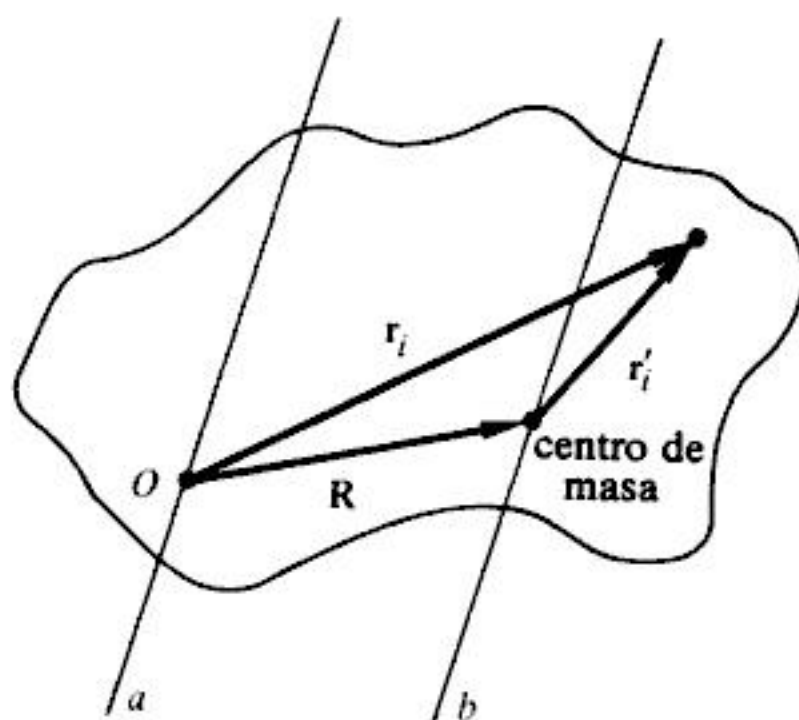


FIGURA 5-3

Vectores que intervienen en la relación entre momentos de inercia respecto a ejes paralelos.

El tensor de inercia para el origen O , expresado en la forma de afinor indicada en la ecuación (5-14), puede escribirse

$$I = MR^2\mathbf{1} + m_i[(r_i'^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_i')\mathbf{1} - (\mathbf{r}_i'\mathbf{r}_i' + \mathbf{R}\mathbf{r}_i' + \mathbf{r}_i'\mathbf{R})] - M\mathbf{R}\mathbf{R}.$$

Todas las sumas de la forma $m_i\mathbf{r}_i'$ son nulas y la expresión se reduce a

$$I = m_i(r_i'^2\mathbf{1} - \mathbf{r}_i'\mathbf{r}_i') + M(R^2\mathbf{1} - \mathbf{R}\mathbf{R}). \quad (5-22)$$

El primer término es el tensor de inercia I' relativo al centro de masa y el segundo es el tensor de inercia, relativo a O , de una partícula única de masa M situada en el centro de masa. Así pues, tanto el momento de inercia como el tensor de inercia poseen un tipo de descomposición, relativa al centro de masa, muy parecida a la que se encontró en § (1-2) para la cantidad de movimiento, el momento cinético y la energía cinética.

5-4 VALORES PROPIOS DEL TENSOR DE INERCIA Y TRANSFORMACIÓN A LOS EJES PRINCIPALES

Lo que acabamos de ver ha servido para poner de relieve el importante papel que desempeña el tensor de inercia en el estudio del movimiento de cuerpos rígidos. Será, pues, de



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Si los valores propios no son todos distintos, esta demostración de ortogonalidad falla pero se puede reparar sin gran dificultad. Por ejemplo, supongamos que sean iguales dos valores propios, $I_2 = I_3$. Siempre será posible hallar al menos un vector propio que satisfaga la ecuación (5-25) para este valor propio doble. Según la ecuación (5-29), este vector propio es ortogonal al vector propio correspondiente al valor propio distinto I_1 . Así podremos hallar un sistema de coordenadas cartesianas dextrogiro para el cual los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j} tienen la dirección de los dos vectores propios hallados hasta ahora. De las ecuaciones de los vectores propios se deduce

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{i} = I_1 \mathbf{i}, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{j} = I_2 \mathbf{j}$$

que en este sistema de coordenadas $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$. Pero la simetría de \mathbf{l} implica también $I_{31} = I_{32} = 0$, es decir, el tensor de inercia es diagonal en este sistema y \mathbf{k} es también un vector propio de \mathbf{l} con valor propio I_2 . Se desprende inmediatamente que *todo* vector en el plano definido por \mathbf{j} y \mathbf{k} es vector propio cuyo valor propio es I_2 .[†] Análogamente, si todos los valores propios son iguales, todas las direcciones del espacio serán vectores propios. Pero entonces \mathbf{l} será diagonal desde un principio y no será necesaria su diagonalización.

Los métodos del Álgebra matricial nos permiten, pues, demostrar que en todo punto de un cuerpo rígido se puede hallar un sistema de ejes cartesianos para los cuales es diagonal el tensor de inercia. Estos ejes se denominan *ejes principales* y los elementos diagonales correspondientes I_1, I_2, I_3 se denominan *momentos principales de inercia*. Dado un cierto sistema inicial de coordenadas en el cuerpo, podemos pasar de él a los ejes principales mediante una transformación ortogonal particular que, en consecuencia, se llama *transformación a los ejes principales*. En la práctica, los momentos principales de inercia, por ser los valores propios de \mathbf{l} , se hallan buscando las raíces de la ecuación secular. Para recordar los pasos que conducen a la ecuación secular, debemos notar que la ecuación de valores propios (cfr. ec. 5-25) en la forma

$$(\mathbf{l} - I\mathbf{1}) \cdot \mathbf{R} = 0, \tag{5-30}$$

corresponde a un sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas en las componentes del vector propio. Dicho sistema de ecuaciones sólo será compatible si se anula el

[†] Un procedimiento equivalente y más general para construir un sistema ortogonal de vectores propios a partir de un sistema no ortogonal posible es el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt de Álgebra lineal. Véase, p. ej., J. A. Eisele y R. M. Mason, *Applied Matrix and Tensor Analysis*, Wiley-Interscience, N. Y. 1970, pp. 16-21, o M. C. Pease, *Methods of Matrix Algebra*, Academic, N. Y. 1965, pp. 59-61. Véase también el estudio análogo de la construcción de modos normales, pp. 253.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

ecuación (1-26) para el movimiento en torno a dicho punto. En el caso de sistemas conservativos holonomos disponemos de la formulación de Lagrange, en donde la lagrangiana toma la forma

$$L(q, \dot{q}) = L_c(q_c, \dot{q}_c) + L_b(q_b, \dot{q}_b).$$

Aquí, L_c es la parte de la lagrangiana que contiene las coordenadas generalizadas q_c (y las velocidades \dot{q}_c) del centro de masa y L_b es la parte relativa a la orientación del cuerpo en torno a su centro de masa, descrita por q_b, \dot{q}_b . Entonces hay de hecho dos problemas distintos, uno con lagrangiana L_c y el otro con lagrangiana L_b . Tanto en la formulación de Newton como en la formulación de Lagrange, conviene trabajar en el sistema de ejes principales del punto de referencia, con lo que la energía cinética de rotación adopta la forma sencilla dada en la ecuación (5-24). Hasta ahora, las únicas coordenadas generalizadas adecuadas que tenemos para el movimiento de rotación del cuerpo rígido son los ángulos de Euler. Desde luego, a menudo el movimiento está confinado a dos dimensiones, como es el caso del movimiento de una lámina rígida en un plano. El eje de rotación está entonces fijo en la dirección perpendicular al plano; sólo se necesita un ángulo de rotación y podemos hacer caso omiso del engorroso mecanismo de los ángulos de Euler.

En el caso del movimiento de rotación en torno a un punto fijo o al centro de masa, el método directo de Newton nos lleva a un sistema de ecuaciones conocidas por el nombre de ecuaciones de Euler del movimiento. Consideramos o un sistema inercial cuyo origen esté en el punto fijo del cuerpo rígido, o un sistema de ejes en el espacio con origen en el centro de masa. En estos dos casos serán válidas la ecuación (1-26) o la (1-26'), las cuales aparecen aquí simplemente en la forma

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_e = \mathbf{N}.$$

El subíndice e se debe a que la derivada es respecto a ejes que no comparten la rotación del cuerpo. En cambio, la ecuación (4-124) puede utilizarse para obtener las derivadas respecto a ejes fijos en el cuerpo

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_e = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L},$$

o, suprimiendo el subíndice «cuerpo»:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}. \quad (5-37)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

donde hemos utilizado la ecuación (5-17). Tanto la energía cinética T como el momento cinético L son constantes del movimiento y por tanto el plano tangente se hallará siempre a una distancia fija del origen del elipsoide. Como la normal al plano, que tiene la dirección de L , también tiene dirección fija, al plano tangente se le da el nombre de *plano invariable*. Podemos representar el movimiento del cuerpo rígido exento de fuerzas considerando que es el del elipsoide de inercia que rueda, sin deslizar, sobre el plano invariable, estando el centro del elipsoide a una altura constante sobre el plano. La rodadura tiene lugar sin deslizamiento porque el punto de contacto está definido por la posición de ρ el cual, por estar dirigido según el eje instantáneo de rotación, es la dirección del cuerpo que está momentáneamente en reposo. La curva que describe el punto de contacto sobre el elipsoide de inercia se denomina *polhodia*, mientras que la curva análoga descrita sobre el plano invariable se denomina *herpolhodia*.*

El tratamiento geométrico de Poinsot resulta muy adecuado para describir por completo el movimiento del cuerpo exento de fuerzas. La dirección del plano invariable y la altura sobre él del elipsoide de inercia están determinadas por los valores T y L , que se cuentan entre las condiciones iniciales del problema. Será, pues, una cuestión geométrica trazar la polhodia y la herpolhodia. La dirección de la velocidad angular en el espacio está dada por la dirección de ρ , mientras que la orientación del elipsoide de inercia, que está fijo en el cuerpo, da la orientación instantánea de éste. En la literatura se encuentran frecuentemente descripciones elaboradas del movimiento exento de fuerzas obtenidas de esta manera.† En el caso particular de ser simétrico el cuerpo, el elipsoide de inercia es un elipsoide de revolución, por lo que la polhodia que está sobre el elipsoide será una circunferencia alrededor del eje de simetría. La herpolhodia que está en el plano invariable será, análogamente, otra circunferencia. Un observador fijo en el cuerpo ve al vector velocidad angular ω moverse sobre la superficie de un cono —llamado *cono del cuerpo*— cuya intersección con el elipsoide de inercia es la polhodia. Correspondientemente, un observador fijo en el sistema de ejes del espacio ve que ω se mueve sobre la superficie de un *cono del espacio* cuya intersección con el plano invariable es la herpolhodia. Por eso, el movimiento libre del cuerpo rígido simétrico se describe a veces por la rodadura del cono del cuerpo sobre el cono del espacio. Cuando el momento de inercia respecto al eje de simetría sea menor que el correspondiente a los otros dos ejes principales, la ecuación (5-35) nos indica que el elipsoide de energía es alargado, es decir, como un balón de rugby —tal como se ha representado en la figura (5-4). En tal caso, el cono del cuerpo es exterior al cono del espacio. Cuando el momento de inercia respecto al eje de simetría sea el mayor, el elipsoide es achatado y el cono del cuerpo rueda sobre el interior del cono del espacio. En uno y otro caso, la descripción física del movimiento es que la dirección de ω tiene un movimiento de *precesión* en el tiempo respecto al eje de simetría del cuerpo.

* De aquí el enunciado que parece un trabalenguas: La polhodia rueda sin deslizar sobre la herpolhodia que está en el plano invariable.

† Véase en particular, Webster, *Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Macmillan, *Theoretical Mechanics-Dynamics of a Rigid Body*, Routh, *Advanced Rigid Dynamics* y Gray, *Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion*. Entre las múltiples propiedades de la construcción de Poinsot que se dan en estas referencias se cuenta el hecho curioso de que la herpolhodia tiene siempre su concavidad hacia el origen. De aquí su nombre, que significa «en forma de serpiente».



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

donde Ω es una frecuencia angular

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3. \quad (5-49)$$

La eliminación de ω_2 entre las dos ecuaciones (5-48) conduce a la ecuación diferencial característica del movimiento armónico simple

$$\ddot{\omega}_1 = -\Omega^2 \omega_1,$$

cuya solución es

$$\omega_1 = A \cos \Omega t.$$

La solución correspondiente de ω_2 se puede hallar sustituyendo esta expresión de ω_1 en la primera de las ecuaciones (5-48):

$$\omega_2 = A \sin \Omega t.$$

Las soluciones de ω_1 y ω_2 muestran que el vector $\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j}$ tiene módulo constante y gira uniformemente en torno al eje z del cuerpo con la frecuencia angular Ω (cfr. fig. 5-6). Por tanto, la velocidad angular ω también tendrá módulo constante y efectúa una *precesión* en torno al eje z con la misma frecuencia, exactamente tal como predecía la construcción de Poinsot.* Debemos recordar que la precesión que hemos descrito ahora es relativa a los ejes del cuerpo los cuales, a su vez, están girando en el espacio con la frecuencia ω que es mayor. En la figura 5-49 vemos que cuanto más próximo sea I_1 a I_3 , menor será la frecuencia de precesión Ω comparada con la frecuencia de rotación ω . Las constantes A (amplitud de la precesión) y ω_3 se pueden evaluar en función de las constantes de movimiento más usuales, cuales son la energía cinética y el módulo del momento cinético. Estas magnitudes pueden escribirse en función de A y ω_3 de la manera siguiente:

$$T = \frac{1}{2} I_1 A^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,$$

$$L^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_3^2,$$

* La precesión puede ponerse de manifiesto de otra manera, definiendo un vector Ω soportado por el eje z y cuyo módulo sea el dado por (5-49). Las ecuaciones (5-47) equivalen entonces en esencia a la ecuación vectorial

$$\dot{\omega} = \omega \times \Omega,$$

que revela de manera inmediata la precesión de ω con la frecuencia Ω .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

o bien, en función de los ángulos de Euler y utilizando la ecuación (4-125)

$$T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2, \quad (5-50)$$

donde han desaparecido los términos en los que figuran ω_1^2 y ω_2^2 . Conocemos un teorema elemental según el cual en un campo gravitatorio constante la energía potencial es la misma que se tendría si el cuerpo estuviera concentrado en su centro de masa, pero vamos a dar aquí una demostración formal del mismo. La energía potencial del cuerpo es la suma extendida a todas las partículas:

$$V = -m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{g}$$

donde \mathbf{g} es el vector constante que representa la aceleración de la gravedad. Según la ecuación (1-21) que define al centro de masa, esto es equivalente a

$$V = -M \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}, \quad (5-51)$$

lo que demuestra el teorema. En función de los ángulos de Euler,

$$V = Mgl \cos \theta, \quad (5-51')$$

con lo que la lagrangiana será

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta. \quad (5-52)$$

Notemos que ϕ y ψ no figuran explícitamente en la lagrangiana; serán, pues, coordenadas cíclicas, lo que indica que las cantidades de movimiento generalizadas correspondientes se mantienen constantes en el tiempo. Ahora bien, hemos visto que la cantidad de movimiento conjugada a un ángulo de rotación es la componente del momento cinético resultante correspondiente al eje de rotación, que para ϕ es el eje vertical y para ψ es el eje z del cuerpo. Partiendo de principios elementales, podemos demostrar que dichas componentes del momento cinético son constantes en el tiempo. Como el momento de la fuerza de gravedad está dirigido según la línea de nodos, no habrá componentes del momento según los ejes vertical y z , ya que por definición estos ejes son perpendiculares a la línea de nodos. Por tanto, las componentes del momento cinético según estos dos ejes deben mantenerse constantes en el tiempo.

Tenemos, pues, dos integrales primeras inmediatas del movimiento:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 = I_1 a \quad (5-53)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

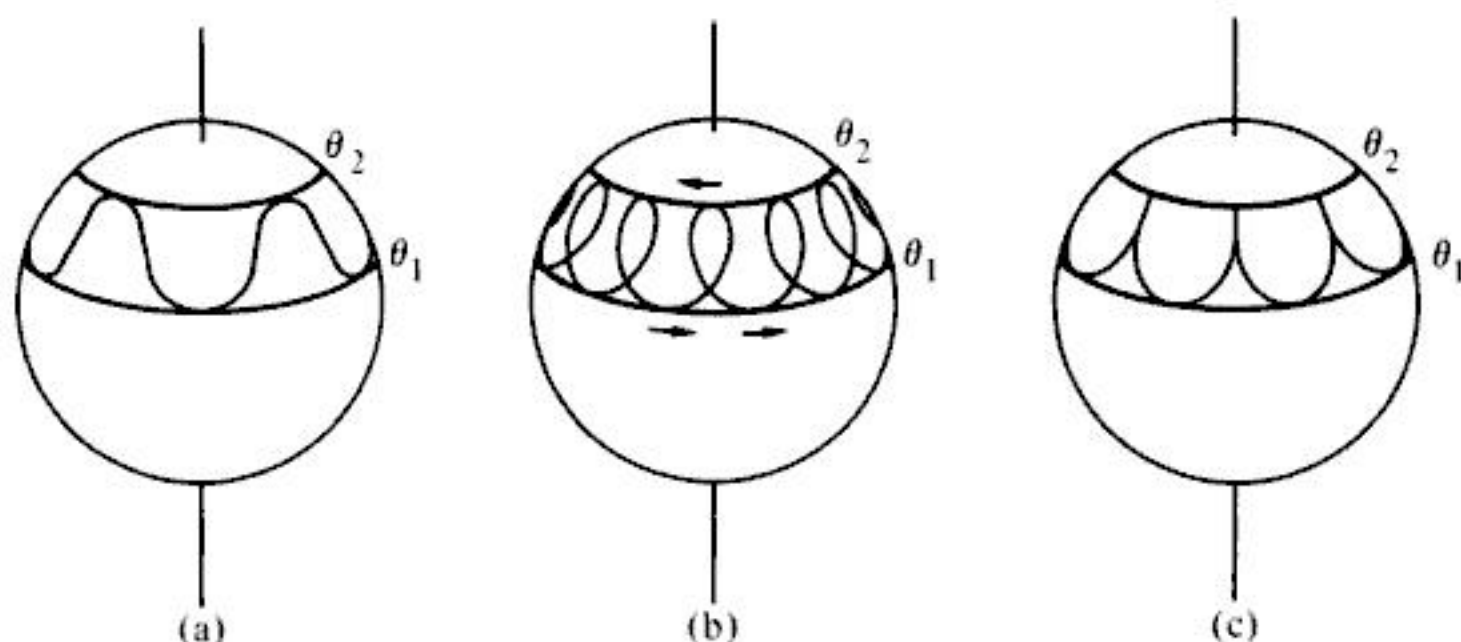


FIGURA 5-9

Formas posibles del lugar geométrico del eje de figura sobre la esfera unidad.

gulos límite θ_1 y θ_2 —durante la precesión, la peonza efectúa una *nutación*.

Si b/a fuese tal que u' se hallara comprendida entre u_1 y u_2 , el sentido de la precesión sería diferente en los dos círculos límite y el lugar geométrico del eje de figura presenta rizos, según puede verse en la figura 5-9(b). Sin embargo, el valor medio de $\dot{\phi}$ no se anula, por lo que siempre habrá una precesión neta en uno u otro sentido. También puede suceder que u' coincida con una de las raíces de $f(u)$. En los círculos límites correspondientes deberán, entonces, anularse $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$, lo cual exige que el lugar geométrico tenga cúspides en el círculo, según se indica en la figura 5-9(c).

Este último caso no es tan excepcional como pueda parecer; corresponde a las condiciones iniciales que suelen estipularse en los tratamientos elementales de peonzas: se supone que inicialmente la peonza simétrica gira en torno a su eje de figura, el cual está fijo en una cierta dirección θ_0 . En el instante $t = 0$ se suelta el eje de figura y el problema consiste en describir el movimiento subsiguiente. Dichas condiciones iniciales son, explícitamente, que en $t = 0$, $\theta = \theta_0$ y $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$. El ángulo θ_0 debe por tanto ser una de las raíces de $f(u)$, de hecho corresponde al círculo superior:

$$u_0 = u_2 = u' = \frac{h}{a}. \quad (5-65)$$

Para la demostración notemos que, con estas condiciones iniciales, E' es igual a $Mgl \cos \theta_0$ y que los términos de E' derivados de la energía cinética de la peonza no pueden ser nunca negativos. Luego cuando θ y ϕ comiencen a apartarse de sus valores iniciales nulos, la energía sólo podrá conservarse a expensas de una disminución de $Mgl \cos \theta$, es decir, mediante un aumento de θ . El θ_0 inicial será, pues, igual θ_2 que es el valor mínimo que puede tener θ . Cuando soltemos la peonza de esta manera, *siempre empezará cayendo* y seguirá así hasta alcanzar el otro ángulo límite θ_1 , realizando entre tanto una precesión. Después, el eje de figura subirá de nuevo hasta θ_2 , siendo el movimiento completo el representado en la figura 5-9(c).



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

ma causa de la precesión. Nuestro tratamiento de la precesión pseudorregular sirve para resolver la paradoja; la precesión crece continuamente a partir del reposo sin ninguna aceleración infinita y la tendencia inicial de la peonza es moverse en la dirección de las fuerzas de gravedad.

Interesa determinar exactamente qué condiciones iniciales darán lugar a una verdadera precesión regular. En tal caso, el ángulo θ permanece constantemente igual a su valor inicial θ_0 , lo cual significa que $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$ o, dicho de otro modo, que $f(u)$ debe tener una raíz doble en u_0 (cfr. fig. 5-10), o sea

$$f(u) = 0, \quad \frac{df}{du} = 0; \quad u = u_0.$$

Según la ecuación (5-62), la primera de estas condiciones implica

$$(\alpha - \beta u_0) = \frac{(b - au_0)^2}{1 - u_0^2}; \quad (5-75)$$

la segunda corresponde a

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a(b - au_0)}{1 - u_0^2} - u_0 \frac{(\alpha - \beta u_0)}{1 - u_0^2}. \quad (5-76)$$

La sustitución de la ecuación (5-75) en la (5-76) nos lleva, en vista de la ecuación (5-57), a una ecuación cuadrática en $\dot{\phi}$:

$$\frac{\beta}{2} = a\dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \cos \theta_0. \quad (5-76')$$

Con las definiciones de β (ec. 5-61) y de a (ec. 5-53), podemos escribir esto de otras dos maneras, según que expresemos a en función de ω_3 o de las $\dot{\psi}$ y $\dot{\phi}$ (constantes):

$$Mgl = \dot{\phi}(I_3\omega_3 - I_1\dot{\phi} \cos \theta_0), \quad (5-77a)$$

o bien

$$Mgl = \dot{\phi}(I_3\dot{\psi} - (I_1 - I_3)\dot{\phi} \cos \theta_0). \quad (5-77b)$$

Las condiciones iniciales del problema de la peonza pesada exigen especificar θ , ϕ , ψ , $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ y además $\dot{\psi}$ o ω_3 , en el instante $t = 0$. Como son cíclicas, los valores iniciales de θ y ψ tienen muy poca importancia y podremos, en general, elegir valores cualesquiera para cada una de las otras cuatro. Pero si, además, exigimos que el movimiento del eje de figura



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

cuando el trompo patina sobre su superficie esférica.*

Una amplia e influyente tecnología se basa en las aplicaciones de cuerpos rígidos que giren rápidamente, particularmente a través del uso de los llamados «giroscopios». Fundamentalmente, un giroscopio es una peonza simétrica que hacemos girar rápidamente por medios exteriores en torno al eje de figura y que está montada sobre una suspensión Cardan de manera que el movimiento del eje de figura no quede restringido respecto a uno o más ejes espaciales, mientras su centro de gravedad permanece en reposo. Si sobre el giroscopio ejercemos adecuadamente momentos exteriores, efectuará los movimientos de precesión y nutación que antes hemos descrito para el caso de la peonza pesada. No obstante, la condición de peonza «rápida» se cumple sobradamente, por lo que la extensión de la nutación siempre será muy pequeña y además queda deliberadamente amortiguada por el método de suspensión. El único fenómeno giroscópico que se observa entonces es la precesión y se puede simplificar mucho el tratamiento matemático necesario para describirla. Podemos ver cómo se hace esto por generalización a partir del caso de la peonza simétrica pesada. Si es \mathbf{R} el radio vector según el eje de figura que va del punto fijo al centro de gravedad, el momento resultante de las fuerzas gravitatorias que se ejercen sobre la peonza es

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} \times M\mathbf{g}, \quad (5-81)$$

donde \mathbf{g} es el vector aceleración de la gravedad, dirigido hacia *abajo*. Si es \mathbf{L}_3 un vector dirigido según el eje de figura, que describe el momento cinético de la rotación en torno al eje de figura y el llamado vector precesión, $\boldsymbol{\omega}_p$, tiene la dirección vertical y un módulo igual a la velocidad angular media de precesión $\dot{\phi}$ (ec. 5-74), el sentido y el módulo de la precesión (pseudorregular) vendrán dados por

$$\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L}_3 = \mathbf{N}. \quad (5-82)$$

Como todo momento respecto al punto fijo o al centro de masa se puede poner en la forma $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$, análoga a la ecuación (5-81), la velocidad media de precesión que resulta para una peonza «rápida» se podrá siempre derivar de la ecuación (5-82), quedando definido el eje de precesión por la dirección de la fuerza \mathbf{F} . En casi todas las aplicaciones técnicas de los giroscopios, el comportamiento de equilibrio (es decir, despreciando los transitorios), se puede deducir de la ecuación (5-82).

Al estar exento de momentos exteriores, el eje de rotación de un giroscopio conservará siempre su dirección inicial relativa a un sistema inercial. Por tanto, los giroscopios se pueden utilizar para indicar o mantener direcciones específicas, por ejemplo, para lograr plataformas estabilizadas. Según indica la ecuación (5-82), a través de los fenómenos de precesión pueden percibir y medir velocidades angulares de rotación y momentos aplicados. Podemos notar en dicha ecuación que la velocidad de precesión es proporcional al momento, mientras que en un cuerpo que no gire permanentemente es la

* En la década de los 1950, este juguete dio lugar a muchísimas publicaciones. Véase, p. ej., A. R. Del Campo, *American Journal of Physics* ²³, 544 (1955) y también Barger y Olsson, *Classical Mechanics*, pp. 254-257.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

y la expresión total de la aproximación al potencial no esférico será

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3}[3I_r - \text{Tr } \mathbf{I}], \quad (5-86)$$

donde m es la masa del primer cuerpo (la Tierra) e I_r es el momento de inercia respecto a la dirección de \mathbf{r} . Según la representación diagonal del tensor de inercia en el sistema de ejes principales, su traza no es sino la suma de los momentos principales de inercia, por lo que podremos escribir V en la forma

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM}{2r^3}[3I_r - (I_1 + I_2 + I_3)]. \quad (5-87)$$

A la ecuación (5-87) se le da a veces el nombre de *fórmula de MacCullagh*. Hasta ahora no hemos hecho hipótesis alguna de cómo es la simetría de revolución. Tomemos ahora el eje de simetría según el tercer eje principal, con lo que $I_1 = I_2$. Si α, β, γ son los cosenos directores de \mathbf{r} respecto a los ejes principales, podremos escribir el momento de inercia I_r en la forma

$$I_r = I_1(\alpha^2 + \beta^2) + I_3\gamma^2 = I_1 + (I_3 - I_1)\gamma^2.$$

Con esta forma de I_r , la ecuación (5-87) da para el potencial

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3}[3\gamma^2 - 1],$$

o sea

$$V = -\frac{GMm}{r} + \frac{GM(I_3 - I_1)}{2r^3}P_2(\gamma). \quad (5-88)$$

La forma general dada por la ecuación (5-88) se podía haber pronosticado desde un principio, ya que el potencial debido a una distribución de masa cumple la ecuación de Poisson. Según sabemos, la solución apropiada para la simetría del cuerpo es un desarrollo de términos cuya forma es $P_n(\gamma)/r^{n+1}$, del cual la ecuación (5-88) presenta los dos primeros términos no nulos. Sin embargo, este procedimiento no da los coeficientes de los términos de manera más sencilla que la deducción que hemos utilizado. Debe hacerse también notar que el desarrollo de V es el análogo gravitatorio del desarrollo multipolar de, p. ej., el potencial electrostático de un cuerpo cargado cualquiera.* En nuestro caso no figura el término correspondiente a $n = 1$ porque sólo hay un signo para la «carga» gravitatoria y no puede haber momento dipolar gravitatorio. Además, el tensor de inercia se define en forma análoga al tensor momento cuadrupolar. Por tanto, puede

* Véase, p. ej., J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, § 4.1.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

velocidades de precesión son pequeñas frente a la velocidad angular orbital, podemos promediar de nuevo sobre la órbita. Este promediado sustituye de hecho la partícula por un aro rígido de masa M de igual radio que la órbita (supuesta circular), que gire en torno al eje de figura del aro con la frecuencia orbital. La ecuación (5-90) da el campo de potencial en el cual se encuentra este aro, siendo θ el ángulo que forman los ejes de figura del aro y la Tierra. La velocidad media de precesión sigue estando dada por la ecuación (5-93), pero ahora I_3 y ω_3 se refieren al aro en rotación y no a la Tierra. Sería, pues, mejor escribir la ecuación (5-93) para esta aplicación en la forma

$$\dot{\phi} = \frac{\tau}{2\pi M r^2} \frac{\partial V}{\partial (\cos \theta)}, \quad (5-93')$$

y la ecuación (5-94) quedará así:

$$\dot{\phi} = -\frac{\tau}{2\pi} \frac{3}{2} \frac{G(I_3 - I_1)}{r^5} \cos \theta. \quad (5-94')$$

Por ejemplo, la ecuación (5-94) la podríamos utilizar para hallar la precesión de la órbita de la Luna debida al achatamiento de la Tierra. Más corriente sería su aplicación a la precesión de satélites artificiales que giren alrededor de la Tierra siguiendo órbitas casi circulares. La fracción de una rotación de precesión en un periodo de satélite es

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \frac{3}{2} \frac{G(I_3 - I_1)}{r^5} \cos \theta.$$

La aplicación de la ley de Kepler, esta vez para el periodo del satélite, reduce este resultado a

$$\frac{\dot{\phi}\tau}{2\pi} = -\frac{3}{2} \frac{I_3 - I_1}{mr^2} \cos \theta, \quad (5-96)$$

donde m es la masa de la Tierra. Si la Tierra fuese una esfera uniforme, los momentos principales de inercia serían

$$I_3 \sim I_1 = \frac{2}{5} m R^2,$$

siendo R el radio de la Tierra. Como la región central es mucho más densa que las capas



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

pero que giren uniformemente en torno a la dirección de **B** con velocidad angular ω_l . Los vectores distancia al origen no cambiarán ni tampoco lo harán, desde luego, distancias escalares tales como $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. En cambio, las velocidades relativas a los nuevos ejes serán diferentes de las velocidades originales y estarán relacionadas con ellas en la forma siguiente:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i.$$

Los dos términos de la lagrangiana afectados por la transformación son

$$\begin{aligned} \frac{m_i v_i^2}{2} &= \frac{m_i v_i'^2}{2} + m_i \mathbf{v}'_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i) + \frac{m_i}{2} (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i), \\ -\boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i &= -\boldsymbol{\omega}_l \cdot (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}'_i) - \boldsymbol{\omega}_l \cdot (\mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i)). \end{aligned}$$

Permutando los productos escalares y vectoriales se ve que los términos lineales en $\boldsymbol{\omega}_l$ y \mathbf{v}' son iguales y opuestos y por tanto se destruyen en la lagrangiana. Una permutación similar en los términos cuadráticos en $\boldsymbol{\omega}_l$ demuestra que son de igual forma y están relacionados con el momento de inercia del sistema respecto al eje definido por $\boldsymbol{\omega}_l$ (v. p. 248). El término cuadrático de la lagrangiana puede, en efecto, escribirse en la forma

$$-\frac{m_i}{2} (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega}_l \times \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_l = -\frac{1}{2} I_l \omega_l^2, \quad (5-109)$$

donde I_l representa el momento de inercia respecto al eje $\boldsymbol{\omega}_l$. En función de las coordenadas del sistema giratorio, la lagrangiana presenta, pues, la sencilla forma

$$L = \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) - \frac{1}{2} I_l \omega_l^2, \quad (5-110)$$

en la cual han desaparecido todos los términos lineales en el campo magnético. Podemos tener una idea de la magnitud relativa del término cuadrático considerando un caso en el cual el movimiento del sistema consiste en una rotación de una cierta frecuencia ω , p. ej., un electrón que gire alrededor del núcleo atómico. Entonces, para sistemas que no se aparten mucho de la simetría esférica, la energía cinética es aproximadamente igual a $\frac{1}{2} I \omega^2$ (sin subíndice el momento de inercia) y el término lineal en $\boldsymbol{\omega}_l$ es del orden de $\boldsymbol{\omega}_l \cdot \mathbf{L} \approx \approx I \omega_l \omega$. Por tanto, el término cuadrático de la ecuación (5-110) será del orden de $(\omega_l/\omega)^2$ comparado con la energía cinética y del orden de (ω_l/ω) relativo al término lineal. En la mayoría de sistemas en escala atómica o inferior, las frecuencias propias son mucho mayores que la frecuencia de Larmor. Comparemos, por ejemplo, la frecuencia de una raya espectral (que es una diferencia de frecuencias propias) con el desplazamiento de frecuencia en el efecto Zeeman simple, que es proporcional a la frecuencia de Larmor. Así



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

EJERCICIOS

1. Si es \mathbf{R}_i una matriz antisimétrica asociada a las coordenadas del punto material i -ésimo de un sistema, con elementos $R_{mn} = \varepsilon_{mnl} x_l$, demostrar que la matriz del tensor de inercia se puede escribir en la forma

$$\mathbf{I} = -m_i(\mathbf{R}_i)^2.$$

2. Mediante transformaciones vectoriales, demostrar directamente que la definición de momento de inercia

$$I = m_i(\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n})$$

se reduce a la ecuación (5-19).

3. ¿Cuál es la razón de la altura al diámetro de un cilindro de revolución tal que el elipsoide de inercia en el centro del cilindro sea una esfera?

4. Hallar los momentos principales de inercia respecto al centro de masa de un cuerpo rígido plano cuya forma sea triangular isósceles y su densidad uniforme. ¿Cuáles son los ejes principales?

5. Tres puntos materiales iguales están situados en $(a,0,0)$, $(0,a,2a)$ y $(0,2a,a)$. Hallar los momentos principales de inercia correspondientes al origen y un sistema de ejes principales.

6. Un cono recto de revolución uniforme de altura h , semiángulo α y densidad ρ rueda sin deslizamiento sobre su superficie lateral sobre un plano horizontal de tal manera que vuelve a su posición inicial al cabo de un tiempo τ . Hallar expresiones para la energía cinética y las componentes del momento cinético del cono.

7. Demostrar que en el caso del movimiento general de un cuerpo rígido en torno a un punto fijo, la variación con el tiempo de la energía cinética T viene dada por

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N}.$$

8. Deducir las ecuaciones de Euler del movimiento (ec. 5-39') a partir de la ecuación de Lagrange del movimiento, en la forma de la ecuación (1-53), para la coordenada generalizada ψ .

9. a) Una barra de peso despreciable y longitud l tiene en sus extremos dos puntos de igual masa m . Se hace girar uniformemente la barra alrededor de un eje que pase por su centro y forme con ella un ángulo θ . A partir de las ecuaciones de Euler, hallar las componentes del momento que acciona la barra según sus ejes principales.

b) A partir de la ecuación fundamental de momentos (1-26), hallar las componentes del momento según ejes fijos en el espacio. Demostrar que estas componentes son compatibles con las halladas en el apartado (a).

10. La ecuación (5-38) es válida para movimientos de sistemas no rígidos, relativa a un sistema de ejes de coordenadas giratorio elegido. En el caso de movimiento no rígido general, si los ejes giratorios se eligen de manera que coincidan con los ejes principales (instantáneos) del sistema



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

26. a) Consideremos un sistema de ejes con acento de origen coincidente con el de un sistema inercial de ejes pero que gire respecto a éste con velocidad angular fija ω_0 . Si un sistema de puntos materiales está sometido a fuerzas que derivan de un potencial conservativo V que sólo dependa de la distancia al origen, demostrar que la lagrangiana del sistema en función de coordenadas relativas al sistema con acento puede escribirse en la forma

$$L = T' + \omega_0 \cdot \mathbf{L}' + \frac{1}{2} \omega_0 \cdot \mathbf{I} \cdot \omega_0 - V,$$

donde los acentos indican que las cantidades se evalúan respecto al sistema de ejes con acento. ¿Cuál es el significado físico de cada uno de los dos términos adicionales?

b) Supongamos que ω_0 está en el plano $x'_2x'_3$ y que una peonza simétrica está obligada a moverse con su eje de figura en el plano $x'_2x'_1$, con lo que sólo necesitaremos dos ángulos de Euler para describir su orientación. Si montamos el cuerpo de manera que su centro de masa esté fijo en el origen y $V = 0$, demostrar que el eje de figura del cuerpo oscila en torno al eje x'_3 de acuerdo con la ecuación de movimiento del péndulo plano y hallar la frecuencia de las oscilaciones de pequeña amplitud. Esto ilustra el principio de la brújula giroscópica.

27. Supongamos que en una peonza simétrica cada elemento de masa tiene una carga proporcionada asociada a él, de manera que sea constante e/m —la llamada peonza simétrica cargada. Si dicho cuerpo gira en un campo magnético uniforme, la lagrangiana, según (5-108), es

$$L = T - \omega_l \cdot \mathbf{L}.$$

Demostrar que T es constante (lo cual es una manifestación de la propiedad de la fuerza de Lorentz que un campo magnético no efectúa trabajo sobre una carga en movimiento) y hallar las otras constantes del movimiento. En la hipótesis de que ω_l es mucho menor que la velocidad inicial de rotación alrededor del eje de figura, obtener expresiones de las frecuencias y amplitudes de nutación y precesión. ¿De dónde vienen las energías cinéticas de nutación y precesión?



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Los coeficientes m_{ij} son, en general, funciones de las coordenadas q_k , pero pueden desarrollarse en serie de Taylor en torno a la configuración de equilibrio:

$$m_{ij}(q_1, \dots, q_n) = m_{ij}(q_{01}, \dots, q_{0n}) + \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 \eta_k + \dots,$$

Como la ecuación (6-5) ya es cuadrática en las $\dot{\eta}_i$, la aproximación más baja a T se obtiene suprimiendo los términos de los desarrollos de m_{ij} menos el primero. Representando por T_{ij} los valores constantes de las funciones m_{ij} en el equilibrio podremos, pues, escribir la energía cinética en la forma

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j. \quad (6-6)$$

También ahora resulta evidente que las constantes T_{ij} deben ser simétricas, ya que cada uno de los términos de la ecuación (6-6) no se ve afectado al permutar los índices. Según las ecuaciones (6-4) y (6-6), la lagrangiana viene dada por

$$L = \frac{1}{2} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j). \quad (6-7)$$

Tomando por coordenadas generalizadas las η , la lagrangiana de la ecuación (6-7) conduce a las siguientes n ecuaciones de movimiento:

$$T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0, \quad (6-8)$$

donde se ha hecho uso explícito de la propiedad de simetría de los coeficientes V_{ij} y T_{ij} . Cada una de las ecuaciones (6-8) contendrá, en general, todas las coordenadas η_i y para obtener el movimiento cerca del equilibrio deberemos integrar este sistema de ecuaciones diferenciales.

6-2 ECUACIÓN DE VALORES PROPIOS Y TRANSFORMACIÓN A LOS EJES PRINCIPALES

Las ecuaciones de movimiento (6-8) son ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, cuya forma es muy conocida en la teoría de circuitos eléctricos. Ello nos lleva a ensayar una solución oscilatoria de la forma

$$\eta_i = C a_i e^{-i\omega t}. \quad (6-9)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

reales. (Todo factor de fase complejo de la amplitud de oscilación se introducirá en el factor C de la ecuación 6-9.) Multipliquemos ahora la ecuación (6-16) por la izquierda por \tilde{a}_k y despejemos λ_k :

$$\lambda_k = \frac{\tilde{a}_k \mathbf{V} \mathbf{a}_k}{\tilde{a}_k \mathbf{T} \mathbf{a}_k}. \quad (6-21)$$

El denominador de esta expresión es igual al doble de la energía cinética para velocidades a_{ik} y como los vectores propios son reales, la suma deberá ser definida positiva. Análogamente, el numerador es la energía potencial para coordenadas a_{ik} y la condición de que V sea mínimo en el equilibrio exige que la suma sea positiva o nula. Ni el numerador ni el denominador pueden ser negativos y el denominador no puede ser nulo, luego λ será siempre finito y positivo. (No obstante, puede ser nulo.) Recordemos que λ es ω^2 , por lo que un λ positivo corresponde a frecuencias de oscilación reales. Si el potencial no fuese un mínimo local, el numerador de la ecuación (6-21) podría ser negativo, dando lugar a frecuencias imaginarias que darían lugar a un crecimiento exponencial de las η_i ilimitado en el tiempo. Dicho movimiento sería, evidentemente, inestable y tenemos en este hecho la prometida demostración matemática de que para que el movimiento sea estable es necesario un mínimo del potencial.

Volvamos, de momento, a la ecuación (6-18) la cual, por ser reales los valores y vectores propios, puede escribirse

$$(\lambda_k - \lambda_l) \tilde{a}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0. \quad (6-18')$$

Si son distintas todas las raíces de la ecuación secular, la ecuación (6-18) sólo podrá ser válida si el producto de matrices es nulo para l diferente de k :

$$\tilde{a}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 0, \quad l \neq k. \quad (6-22a)$$

En varias ocasiones hemos señalado que los valores de las a_{jk} no están fijados totalmente por las ecuaciones (6-10) de valores propios. Podemos eliminar esta indeterminación exigiendo que, además,

$$\tilde{a}_k \mathbf{T} \mathbf{a}_k = 1. \quad (6-22b)$$

Hay n ecuaciones (6-22) y fijan unívocamente la componente arbitraria de cada uno de los n vectores propios \mathbf{a}_k .^{*} Si con todos los vectores propios \mathbf{a}_k formamos una matriz cuadrada

^{*} La ecuación (6-22b) puede ponerse en una forma que muestre explícitamente que es suficiente para eliminar la indeterminación de las a_{jk} . Supongamos que queremos evaluar la magnitud de a_{1k} ; el cociente entre cualquier otra a_{jk} y a_{1k} se obtiene de las ecuaciones (6-10). Entonces, la ecuación (6-22 b) puede escribirse en la forma

$$\sum_{i,j} T_{ij} \frac{a_{ik}}{a_{1k}} \frac{a_{jk}}{a_{1k}} = \frac{1}{a_{1k}^2}.$$

El primer miembro está determinado por las ecuaciones de valores propios y puede evaluarse directamente para dar a_{1k} .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Entonces, la ecuación secular podrá escribirse

$$(T_{12}^2 - T_{11}T_{22})(\lambda_0 - \lambda)^2 = 0,$$

indicando que λ_0 es una raíz doble de la ecuación secular. Ahora bien, las ecuaciones (6-10) de valores propios son, para esta raíz,

$$(V_{11} - \lambda_0 T_{11})a_1 + (V_{12} - \lambda_0 T_{12})a_2 = 0,$$

$$(V_{12} - \lambda_0 T_{12})a_1 + (V_{22} - \lambda_0 T_{22})a_2 = 0,$$

y en virtud de las condiciones (6-30) todos los coeficientes de las a se anularán idénticamente. Entonces, todo sistema de valores de las dos a satisfarán las ecuaciones de valores propios. Incluso con el requisito de normalización (6-22 b) habrá así una simple infinitud de vectores propios correspondientes a una raíz doble de la ecuación secular, una doble infinitud para una raíz triple, etc.

En general, un par cualquiera de vectores propios elegidos al azar entre el conjunto infinito de vectores permitidos no serán ortogonales. A pesar de todo, siempre será posible construir un par de vectores permitidos que sean ortogonales y podrán utilizarse para formar la matriz ortogonal A . Por razón de sencillez, consideremos el procedimiento que hay que seguir en el caso de una raíz doble. Sean \mathbf{a}'_k y \mathbf{a}'_l dos vectores propios permisibles cualesquiera para una raíz doble dada λ , que se hayan normalizado de manera que satisfagan la ecuación (6-22b). Toda combinación lineal de \mathbf{a}'_k y \mathbf{a}'_l será también un vector propio para la raíz λ . Queremos, pues, construir un vector \mathbf{a}_l ,

$$\mathbf{a}_l = c_1 \mathbf{a}'_k + c_2 \mathbf{a}'_l, \quad (6-31)$$

en donde c_1 y c_2 son constantes tales que \mathbf{a}_l sea ortogonal a \mathbf{a}'_k . La condición de ortogonalidad (ec. 6-22a) exige entonces que

$$\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}'_k = c_1 + c_2 \tilde{\mathbf{a}}'_l \mathbf{T} \mathbf{a}'_k = 0,$$

donde se ha hecho uso de la normalización \mathbf{a}'_k . Se deduce, pues, que el cociente entre c_1 y c_2 debe venir dado por

$$\frac{c_1}{c_2} = -\tilde{\mathbf{a}}'_l \mathbf{T} \mathbf{a}'_k \equiv -\tau_l. \quad (6-32)$$

Además, el requisito de que \mathbf{a}_l esté normalizado proporciona otra condición impuesta a los dos coeficientes la cual, en función del τ_l definido por la ecuación (6-32), toma la forma

$$\tilde{\mathbf{a}}_l \mathbf{T} \mathbf{a}_l = 1 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 \tau_l. \quad (6-33)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Pero A diagonaliza a V mediante una transformación de congruencia (cfr. ec. 6-29) y por tanto, el potencial se reducirá simplemente a

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\zeta} \lambda \zeta = \frac{1}{2} \omega_k^2 \zeta_k^2. \quad (6-43)$$

En las nuevas coordenadas, la energía cinética presenta una forma aún más simple. Como las velocidades se transforman de igual manera que las coordenadas, la T dada por la ecuación (6-6) se transformará en

$$T = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\zeta}} \tilde{A} \dot{\zeta},$$

la cual, en virtud de la ecuación (6-23), se reduce a

$$T = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\zeta}} \dot{\zeta} = \frac{1}{2} \dot{\zeta}_i \dot{\zeta}_i. \quad (6-44)$$

Las ecuaciones (6-43) y (6-44) dicen que, en las nuevas coordenadas, las energías potencial y cinética son sumas de cuadrados solamente, sin que haya términos cruzados. Desde luego, este resultado sólo es otra manera de decir que A produce una transformación a ejes principales. Recordemos que la transformación a ejes principales del tensor de inercia estaba destinada concretamente a reducir el momento de inercia a una suma de cuadrados, siendo los nuevos ejes los ejes principales del elipsoide de inercia. Ahora, las energías cinética y potencial son también formas cuadráticas (como lo era el momento de inercia) y ambas están diagonalizadas por A . Por esta razón, la transformación a ejes principales que hemos utilizado aquí constituye un ejemplo particular del conocido proceso algebraico de *diagonalización simultánea de dos formas cuadráticas*.

Hay otra manera de contemplar la transformación a ejes principales de T y V , cuyo lenguaje es más próximo al proceso de diagonalización del tensor de inercia descrito en el capítulo 5. No proporciona ninguna simplificación del proceso de cálculo pero ayuda a explicar por qué es posible diagonalizar simultáneamente dos formas cuadráticas —y por qué no se puede hacerlo, en general, con tres. La matriz T es real y simétrica, al igual que el tensor de inercia I . Si consideramos que el espacio η sea un espacio cartesiano de n dimensiones, será posible hallar una transformación ortogonal real B que lleve a un nuevo sistema de coordenadas cartesianas,

$$y = B\eta,$$

en el cual T sea diagonal. La matriz B deberá transformar a T mediante una transformación de semejanza en una matriz diagonal C :

$$B T B^{-1} = B T \tilde{B} = C.$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

La energía cinética tiene la forma aún más simple:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{M}{2}\dot{\eta}_2^2, \quad (6-51)$$

por lo que la matriz \mathbf{T} es diagonal:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \quad (6-52)$$

Combinando estas dos matrices, la ecuación secular queda en la forma

$$|\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}| = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0. \quad (6-53)$$

El cálculo directo del determinante lleva a la ecuación cúbica en ω^2 :

$$\omega^2(k - \omega^2 m)(k(M + 2m) - \omega^2 Mm) = 0, \quad (6-54)$$

con las soluciones evidentes

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}. \quad (6-55)$$

El primer valor propio, $\omega_1 = 0$, puede parecer un tanto sorprendente e incluso alarmante, a primera vista. Esta solución no corresponde a ningún movimiento oscilatorio en absoluto, ya que la ecuación de movimiento para la coordenada normal correspondiente es

$$\ddot{\zeta}_1 = 0,$$

que da lugar a un movimiento de traslación uniforme. Pero esta es, precisamente, la clave de la dificultad. La frecuencia nula se debe al hecho de que la molécula puede trasladarse rigidamente a lo largo de su eje sin que varíe su energía potencial, ejemplo de equilibrio indiferente que ya habíamos mencionado. Como es nula la fuerza recuperadora contra dicho movimiento, la «frecuencia» efectiva debe anularse también. Hemos hecho la hipótesis de que la molécula tiene tres grados de libertad para el movimiento de vibración mientras que, en realidad, uno de ellos es un grado de libertad de cuerpo rígido.

En relación con una frecuencia de resonancia nula podemos tratar algunos puntos



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

noventa grados.

Al aumentar la complejidad de la molécula, el tamaño del determinante secular se hace muy grande y el cálculo de las frecuencias normales y de las amplitudes resulta ser un problema de considerable magnitud. Sin embargo, hemos visto que incluso en una situación tan simple como la de la molécula triatómica lineal, el estudio de las simetrías que puede esperarse tengan las vibraciones simplifica en gran manera los cálculos. Se ha dedicado mucho ingenio matemático a la descripción de las simetrías inherentes a las moléculas complejas para reducir la labor que implica la búsqueda de sus frecuencias de vibración. La teoría de los grupos de simetría se ha aplicado con gran éxito en la factorización del gran determinante secular en bloques menores que se puedan diagonalizar por separado. No obstante, se ha señalado que una manipulación matemática tan elaborada era más apropiada en los tiempos en los cuales los cálculos numéricos eran difíciles y engorrosos. Teniendo en cuenta la velocidad y la capacidad de memoria de los ordenadores actuales, puede ser más fácil y preciso, al fin y al cabo, un método directo. Incluso para ordenadores científicos de tamaño moderado, existen en la actualidad rutinas rápidas y exactas destinadas a la resolución de problemas de valores propios de matrices grandes. Existe, pues, una tendencia hacia el método «a lo bestia» en el cual se utilizan coordenadas cartesianas ponderadas en masa (ver p. 309) para formular el problema. El elipsoide de energía cinética para las vibraciones moleculares es entonces ya una esfera y la búsqueda de los modos normales se reduce a diagonalizar la energía potencial. Parece probable que sea esta la dirección que en el futuro tomen los cálculos de las frecuencias de vibración en los problemas de Fisicoquímica.

6-5 VIBRACIONES FORZADAS Y EFECTO DE LAS FUERZAS DISIPATIVAS

Cuando el sistema se desplaza inicialmente respecto a su configuración de equilibrio y se suelta dejándolo que oscile por sí solo, se producen vibraciones libres. Sin embargo, muy a menudo se pone el sistema en oscilación mediante una fuerza excitadora exterior que sigue actuando sobre el sistema después de $t = 0$. La frecuencia de esta *oscilación forzada* está entonces determinada por la frecuencia de la fuerza excitadora y no por las frecuencias de resonancia. A pesar de todo, los modos normales resultan muy importantes en la obtención de las *amplitudes* de las vibraciones forzadas y el problema se simplifica mucho utilizando coordenadas normales obtenidas de los modos libres.

Si es F_j la fuerza generalizada correspondiente a la coordenada η_j , según la ecuación (1-49), la fuerza generalizada Q_i correspondiente a la coordenada ζ_i será

$$Q_i = a_{ji}F_j. \quad (6-60)$$

Las ecuaciones de movimiento expresadas en coordenadas normales serán ahora

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = Q_i. \quad (6-61)$$

Las ecuaciones (6-61) constituyen un sistema de n ecuaciones diferenciales con segundo miembro que sólo podremos resolver si sabemos cómo depende Q_i del tiempo. Aun



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

movimiento total será entonces, simplemente, un amortiguamiento exponencial de los modos de vibración libres:

$$\xi_i = C_i e^{-\mathcal{F}_i t/2} e^{-i\omega_i t}, \quad (6-72)$$

Si la función de disipación no se puede diagonalizar junto con T y V , será mucho más difícil obtener la solución. La naturaleza general de la solución es, sin embargo, muy parecida: un factor de amortiguamiento exponencial que multiplica a una función exponencial oscilatoria. Supongamos que buscamos una solución de las ecuaciones (6-68) de la forma

$$\eta_j = C a_j e^{-i\omega t} = C a_j e^{-\kappa t} e^{-2\pi i \nu t}. \quad (6-73)$$

Con esta solución, las ecuaciones (6-68) se convierten en un sistema de ecuaciones lineales

$$V_{ij} a_j - i\omega \mathcal{F}_{ij} a_j - \omega^2 T_{ij} a_j = 0. \quad (6-74)$$

Conviene escribir ω en la forma $i\gamma$, de manera que

$$\gamma = -i\omega = -\kappa - 2\pi i \nu, \quad (6-75)$$

y así $-\kappa$ será la parte real de γ . En función de matrices cuadradas de V , T , y \mathcal{F} , el sistema de ecuaciones (6-74) se convierte en una ecuación de matrices columna en la cual interviene γ :

$$\mathbf{V}\mathbf{a} + \gamma\mathbf{F}\mathbf{a} + \gamma^2\mathbf{T}\mathbf{a} = 0. \quad (6-76)$$

El sistema de ecuaciones homogéneas (6-74) o (6-76) sólo tiene solución para las a_j cuando ω o γ tomen ciertos valores. Sin evaluar realmente la ecuación secular correspondiente, podemos demostrar que κ debe siempre ser no negativa. Multiplicando a la izquierda por \mathbf{a}^\dagger la ecuación matricial (6-76) la convertimos en ecuación escalar en γ :

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{V} \mathbf{a} + \gamma \mathbf{a}^\dagger \mathbf{F} \mathbf{a} + \gamma^2 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{T} \mathbf{a} = 0. \quad (6-77)$$

La ecuación (6-77) es cuadrática en γ con coeficientes que son productos de matrices del mismo tipo general encontrado en la ecuación (6-19). En virtud de la simetría de \mathbf{V} , \mathbf{F} y \mathbf{T} los productos de matrices son todos reales, según podemos ver desarrollando \mathbf{a} en la forma $\alpha + i\beta$ (cfr. ec. 6-20). Luego si γ es solución de la ecuación cuadrática también lo deberá ser su complejo conjugado γ^* . Ahora bien, la suma de las dos raíces de una ecuación cuadrática es igual al cociente entre el coeficiente del término de primer grado y el del



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

consideran con cierto detalle las oscilaciones de la molécula triatómica, tanto lineal como «curva». En el presente capítulo sólo se consideran oscilaciones lineales y se supone que los elementos paramétricos de las energías potenciales y cinética son constantes en el tiempo. El estudio de la excitación paramétrica de osciladores, en los cuales dichos elementos varían con el tiempo y de las oscilaciones alineales, ha crecido rápidamente en las últimas décadas y se ha convertido en un área que exige un tratamiento aparte y masivo. En los §§ 27-30, Landau y Lifshitz dan una introducción concisa al tema en el que los rusos han contribuido de manera notable. Sin embargo, en el tratamiento sólo apunta la cumbre del iceberg.

L. MEIROVITCH, *Methods of Analytical Dynamics*. Se presentan aquí tratamientos modernos para el estudio de sistemas oscilatorios en una forma que no pierde contacto con la realidad práctica. El tema de este capítulo aparece bajo el aspecto de sistemas autónomos lineales, pero se hace hincapié en si el movimiento es estable, cosa que hemos presupuesto desde el principio. Se estudian los criterios clásico y moderno (p. ej., el método de Liapunov). Las oscilaciones paramétricas (sistemas no autónomos) ocupan un capítulo aparte.

Y. CHEN, *Vibrations: Theoretical Methods*. Gran parte de este texto orientado técnicamente se dedica a introducir las ideas fundamentales de Mecánica por una parte y tratar vibraciones de continuos por otra. El resto cubre la materia del presente capítulo con muchos ejemplos elaborados y los elementos de las matrices pertinentes presentados de manera explícita (y a veces un tanto pesada). Particular interés presenta la aplicación de los métodos de las transformaciones de Laplace y de Fourier para el tratamiento de problemas de oscilaciones forzadas o excitadas.

H. C. CORBEN y P. STEHLE, *Classical Mechanics*. El corto capítulo relativo a oscilaciones pequeñas de este conocido texto concentra algunos ejemplos más que dar teoría general. Merece mención especial en apéndice 3 en el que se da una breve introducción al empleo de métodos de la teoría de grupos para reducir la complejidad del problema de las frecuencias propias de las moléculas, basados en las simetrías intrínsecas que presentan los sistemas. En la época preinformática, cuando había que resolver a mano los problemas, todo método que redujera el volumen de cálculos era naturalmente objeto de interés y estudios intensos. El advenimiento del rápido ordenador ha disminuido la importancia de estos métodos, si bien el empleo de las propiedades de simetría para identificar las frecuencias cero o degeneradas reviste un interés evidente. En relación con esto, v. W. D. Gwinn: «Normal Coordinates: General Theory, Redundant Coordinates, and General Analysis Using Electronic Computers», *Jour. Chem. Phys.* **55**, 477 (Julio 15, 1971).

G. HERZBERG, *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules*. En este tratado se dan muchos ejemplos de la aplicación de la teoría clásica de las vibraciones pequeñas a la estructura molecular. Se aplican las técnicas de utilización de constantes del movimiento y propiedades de simetría para reducir la complejidad del cálculo a fin de hallar soluciones explícitas para muchos modelos moleculares. Se muestran esquemáticamente los distintos modos normales correspondientes a muchas de las moléculas.

E. B. WILSON, JR.; J. C. DECIUS y P. C. CROSS, *Molecular Vibrations*. Este tratado de 1955 parece seguir siendo para los químicos el tratado típico de los problemas de vibraciones moleculares. En espíritu, es totalmente preinformático —el largo capítulo referente a la molécula de benceno termina impetrando al lector a que se familiarice en la manipulación de matrices comprobando los cálculos del capítulo con una «calculadora mecánica de pupitre». Se penetra en la utilización de los grupos de simetría con considerable detalle. Se requiere algún conocimiento de la Mecánica cuántica.

LORD RAYLEIGH, *Theory of Sound*. Es uno de los clásicos de la literatura física, que contiene multitud de teoremas y ejemplos físicos de todos los aspectos de la teoría de la vibración. El propio



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

15. Si no son sinusoidales las fuerzas excitadoras generalizadas Q_i , demostrar que las vibraciones forzadas de las coordenadas normales en ausencia de amortiguamiento vienen dadas por

$$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)}{\omega_i^2 - \omega^2} e^{-i\omega t} d\omega,$$

donde $G_i(\omega)$ es la transformada de Fourier de Q_i definida por

$$Q_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Si la función de disipación se diagonaliza simultáneamente con T y V , demostrar que las vibraciones forzadas vienen dadas por

$$\zeta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(\omega)(\omega_i^2 - \omega^2 + i\omega\mathcal{F}_i)}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\mathcal{F}_i^2} e^{-i\omega t} dt,$$

que tiene la forma típica de denominador de resonancia. Estos resultados son simples ejemplos de la potencia técnica del *cálculo operacional* para el tratamiento de vibraciones transitorias.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Einstein, afirmando explícitamente el postulado de equivalencia, sacó la conclusión de que era la forma de las ecuaciones de Maxwell la que debía mantenerse invariante y que, por tanto, la transformación de Galileo no podía ser correcta. Hay que encontrar una nueva relación entre sistemas en movimiento relativo uniforme, la *transformación de Lorentz*, que dé la misma celeridad de la luz en todos los sistemas que se muevan uniformemente. Einstein demostró que dicha transformación exige una revisión de los conceptos usuales de tiempo y de simultaneidad.

Es muy probable, a priori, que las ecuaciones de movimiento de Newton necesiten también revisión, ya que satisfacen el principio de equivalencia solamente ante la transformación de Galileo, la cual vemos ahora que no es correcta. Es posible que otras leyes de la Física corrientemente aceptadas puedan no conservar su forma ante una transformación de Lorentz y deban, en consecuencia, generalizarse también para que tengan las propiedades de transformación adecuadas. Desde luego, las generalizaciones deben ser tales que reduzcan dichas leyes a las formas acostumbradas en el caso de velocidades muy inferiores a la de la luz, que es cuando la transformación de Galileo resulta aproximadamente correcta.

El programa de la teoría de la Relatividad restringida es, pues, doble. Primero, hay que obtener una transformación entre dos sistemas que se muevan uniformemente que conserve invariable la velocidad de la luz. Segundo, deben examinarse las leyes de la Física atendiendo a sus propiedades de transformación ante esta transformación de Lorentz. Las leyes que no mantengan invariante su forma deben generalizarse de manera que obedezcan el postulado de equivalencia. De la imagen física resultante de este programa se ha obtenido abundante verificación experimental y en el último análisis es ésta la única justificación que necesitan las hipótesis fundamentales de Einstein.

7-2 TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Se supone que el lector se ha encontrado anteriormente con las ecuaciones de la transformación de Lorentz.* Consideremos dos sistemas de coordenadas cuyos orígenes coincidan en el instante $t = 0$, vistos por observadores en ambos sistemas. Un sistema, al que llamaremos sistema con acento, se mueve uniformemente con velocidad v relativa al otro sistema, sistema sin acento, en una dirección paralela al eje z . En tal caso, la transformación de Lorentz entre las coordenadas y tiempos, medidos en los dos sistemas, viene dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \tag{7-5}$$

* Deducciones de la transformación de Lorentz abundan en todos los niveles de sofisticación y grados de rigor. Véase la lista de referencias al final del capítulo.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Por tanto, los elementos de \mathbf{L} para una dirección cualquiera de β son

$$\begin{aligned} L_{jk} &= \delta_{jk} + \frac{\beta_j \beta_k}{\beta^2} (\gamma - 1), \\ L_{j4} &= i\beta_j \gamma, \\ L_{4k} &= -i\beta_k \gamma, \\ L_{44} &= \gamma. \end{aligned} \tag{7-17}$$

Por ejemplo, la transformación de Lorentz particular con la cual hemos iniciado este apartado tiene la velocidad relativa dirigida según el eje z y la matriz \mathbf{L} adopta entonces la forma sencilla

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \tag{7-18}$$

En el capítulo 4 vimos que la propiedad fundamental de una matriz ortogonal es que su traspuesta es igual a su inversa. En el caso de la transformación de Lorentz con vector velocidad relativa β , la inversa debe ser la misma matriz, pero para una velocidad $-\beta$. El examen de la ecuación (7-17) muestra de manera inmediata que los elementos cumplen esta condición; cambiar el signo de β_j equivale a trasponer los subíndices.

Aún podemos aprovechar más la analogía de \mathbf{L} con las transformaciones ortogonales tridimensionales. En la ecuación (7-18) vemos que la submatriz 2×2 de las coordenadas tercera y cuarta se asemeja a la submatriz correspondiente de la rotación de un sistema de coordenadas tridimensional alrededor de un eje:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Correspondientemente, podemos decir que la ecuación (7-18) es una rotación en el plano x_3x_4 del espacio de Minkowski pero de ángulo ϕ que es imaginario:

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{sen } \phi = \frac{i\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{7-19}$$

Si nos resulta incómodo utilizar un ángulo imaginario, podemos introducir un ángulo real



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Una transformación de Lorentz restringida que describa la relación entre dos sistemas de ejes paralelos que se muevan uniformemente uno respecto a otro, es decir, sin rotación espacial, recibe el nombre de transformación de Lorentz *pura*. Está claro que la matriz de transformación dada por las ecuaciones (7-17) es la de una transformación de Lorentz pura. Resulta intuitivamente evidente que toda transformación de Lorentz restringida se puede descomponer en una transformación de Lorentz pura y una rotación espacial sin movimiento relativo (en uno u otro orden). Podemos esbozar de manera sencilla el procedimiento para construir las transformaciones componentes. Supongamos que queremos representar una transformación de Lorentz por un producto de una transformación pura por una rotación espacial:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}\mathbf{P}. \quad (7-28)$$

Las coordenadas x'_ν de un punto en el sistema transformado están relacionadas con las coordenadas en el espacio original de la manera siguiente:

$$x_\mu = L_{\nu\mu} x'_\nu.$$

¿Con qué rapidez ve un observador en el sistema sin acento moverse al origen del sistema con acento ($x'_j = 0$)? Las coordenadas sin acento de dicho origen son

$$x_j = L_{4j} x'_4, \quad x_4 = L_{44} x'_4.$$

El vector velocidad relativa del origen con acento tendrá, pues, las componentes

$$\beta_j = \frac{x_j}{ct} = \frac{ix_j}{x_4} = \frac{iL_{4j}}{L_{44}}. \quad (7-29)$$

De la ecuación (7-26) se deduce entonces que

$$L_{44}^2 (1 - \beta_j \beta_j) = 1.$$

El que L_{44} sea real implica de manera inmediata que la β definida por la ecuación (7-29) esté comprendida entre 0 y 1 y que en función de este valor de β , L_{44} debe tener el valor

$$L_{44} = (1 - \beta^2)^{1/2} \equiv \gamma. \quad (7-30)$$

Construyamos ahora una transformación de Lorentz pura $\mathbf{P}(\beta)$ correspondiente al vector velocidad relativa (ec. 7-29). La transformación inversa tiene la matriz $\mathbf{P}(-\beta)$. Se deduce, por tanto, que la matriz \mathbf{R} se puede construir en forma de producto de la manera siguiente:

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{P}(-\beta). \quad (7-31)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

7-3 TRANSFORMACIONES DE LORENTZ EN ESPACIOS REALES DE CUATRO DIMENSIONES*

A la vez que conserva su propiedad de mantener la velocidad de la luz, la transformación de Lorentz se puede también considerar que es una transformación lineal en un espacio *real* de cuatro dimensiones. En dicho espacio, la cuarta coordenada suele representarse por $x_0 = ct$. Para que la luz se propague en todos los sistemas isótopamente con celeridad c , el cuadrado del módulo de un vector debe seguir viniendo dado por la ecuación (7-13). Luego, el espacio real no puede ser euclídeo, sino de Riemann con un tensor métrico diagonal G de la forma

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7-40)$$

donde el índice de las coordenadas toma los valores 1230. De la ecuación (6-26) recordemos que el cuadrado del módulo de un vector en un tal espacio viene dado por

$$\tilde{\mathbf{x}}G\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2, \quad (7-41)$$

exactamente como en la ecuación (7-13). † Una transformación de Lorentz homogénea es una transformación lineal en este espacio real que mantiene el módulo de los vectores. Como los elementos de la transformación son reales y por tanto no son los mismos de L , designaremos por Λ la transformación de Lorentz real. La condición de que los vectores tengan igual módulo antes y después de la transformación es

$$\tilde{\mathbf{x}}'G\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{x}}G\mathbf{x}. \quad (7-42)$$

Pero, tenemos

$$\tilde{\mathbf{x}}'G\mathbf{x}' = \tilde{\Lambda}\tilde{\mathbf{x}}G\Lambda\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}\tilde{\Lambda}G\Lambda\mathbf{x}.$$

Así pues, para que sea válida la ecuación (7-42), Λ debe ser tal que

$$\tilde{\Lambda}G\Lambda = G. \quad (7-43)$$

* En el apartado anterior hemos presentado casi todas las características cinemáticas de la transformación de Lorentz necesarias para el resto del libro. Si bien este apartado y el siguiente son importantes para el empleo de la transformación de Lorentz en diversas partes de la Física moderna, pueden suprimirse sin afectar ello al tratamiento de la Mecánica clásica de partículas relativistas.

† Como el cuadrado puede ser positivo o negativo, los tensores métricos como el de la ecuación (7-40) se dice que definen una métrica indefinida.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

podrá escribirse en la forma

$$A_\nu B^\nu$$

donde A_ν es el vector covariante:

$$A_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu. \quad (7-52)$$

De esta manera, el cuadrado del módulo del vector de posición en el cuadriespacio real podrá escribirse en la forma

$${}_r x^\mu x_\mu$$

sin haber tenido que introducir específicamente el tensor métrico. Sólo hemos de recordar que un factor del producto escalar se sustituye por el vector covariante formado por contracción con el tensor métrico.*

Una variante del uso de un espacio real consiste en introducir un espacio con el tensor métrico.

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (7-53)$$

El cuadrado del módulo de un vector de posición será ahora

$$\mathbf{x} \mathbf{G}' \mathbf{x} \equiv x_\mu G'_{\mu\nu} x_\nu = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + c^2 t^2. \quad (7-41')$$

Está claro que una transformación que conserve este módulo también mantendrá invariante la celeridad de la luz y la transformación de Lorentz correspondiente debe coincidir con la Λ antes citada. Todo el formalismo anterior queda inalterado, solamente el valor del producto escalar cambia de signo. Los defensores del tensor métrico (7-53) aducen que eliminará algunos signos menos en fórmulas que sugieran posteriormente en la Dinámica de partículas. Por otra parte, esta métrica representa un cambio discontinuo

* Si tratamos del producto escalar de dos vectores covariantes, debemos «subir» el índice por contracción con el inverso del tensor métrico, el cual puede demostrarse que es contravariante. Los tensores métricos que estamos empleando, los cuales son diagonales con elementos ± 1 son sus propios inversos y no hay diferencia entre tensores métricos covariantes y contravariantes.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

(7-20). La matriz de la ecuación (7-58) puede también escribirse en la forma

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} \cosh \frac{\psi}{2} - \sigma_3 \sinh \frac{\psi}{2}, \quad (7-60)$$

análoga a la ecuación (4-76) para la rotación espacial alrededor del eje z . Podemos fácilmente generalizar este resultado para una transformación de Lorentz pura arbitraria. Al igual que una rotación propia se podría parametrizar en función de una dirección del eje de rotación y una rotación de ángulo finito, también una rotación de Lorentz pura se puede describir en función de un vector unitario κ en la dirección del movimiento relativo y un «ángulo» ψ definido por la ecuación (7-20). La forma vectorial de la transformación de Lorentz (ec. 7-11 y 7-12) podrá escribirse con estos parámetros en la forma

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\kappa \cdot \mathbf{r})\kappa(\cosh \psi - 1) - \kappa x_0 \sinh \psi, \quad (7-61)$$

$$x'_0 = -(\kappa \cdot \mathbf{r}) \sinh \psi + x_0 \cosh \psi. \quad (7-62)$$

La ecuación (7-61) recuerda mucho la forma de la fórmula de la rotación finita (ec. 4-92). La extensión evidente de la ecuación (7-60) al movimiento relativo en una dirección dada κ es

$$\mathbf{Q}(\kappa, \psi) = \mathbf{1} \cosh \frac{\psi}{2} - \kappa \cdot \boldsymbol{\sigma} \sinh \frac{\psi}{2}, \quad (7-63)$$

que podemos comparar con la ecuación (4-98) para rotaciones espaciales.* Observemos que la forma de la ecuación (7-63) demuestra que las matrices \mathbf{Q} para transformaciones de Lorentz puras son hermiticas, mientras que para rotaciones propias son unitarias. Al igual que sucede con las rotaciones puras, la ecuación (7-63) implica una representación exponencial de la matriz \mathbf{Q} de una transformación de Lorentz pura:

$$\mathbf{Q}(\kappa, \psi) = \exp [-\kappa \cdot \boldsymbol{\sigma} (\psi/2)]. \quad (7-64)$$

Como una transformación de Lorentz restringida es el producto de una transformación de Lorentz pura por una rotación espacial, podemos combinar las ecuaciones (7-64) y (4-99) para obtener la forma correspondiente de la matriz \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{n}\Phi; \kappa, \psi) = \exp [i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} (\Phi/2)] \exp [-\kappa \cdot \boldsymbol{\sigma} (\psi/2)]. \quad (7-65)$$

* No podemos introducir cantidades análogas a los «ángulos de Euler» porque a diferencia de las rotaciones propias, el producto de dos transformaciones de Lorentz puras no colineales no es una transformación de Lorentz pura.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Por tanto, la relación entre los dos vectores no se ve perturbada por la rotación espacial; en el nuevo sistema seguiremos teniendo

$$\mathbf{F}' = \mathbf{G}'.$$

Notemos que la invariancia de la forma de la relación es totalmente consecuencia del hecho de que los dos miembros se transforman como vectores. Decimos que los términos de la ecuación son *covariantes*.^{*} Análogamente, una igualdad entre dos tensores de segundo orden

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}$$

implica necesariamente la misma igualdad entre los dos tensores transformados

$$\mathbf{C}' = \mathbf{D}'$$

porque ambos tensores se transforman covariantemente ante una rotación espacial. En cambio, una ecuación que comporte por separado una componente de un vector y, por ejemplo, una componente de un tensor no podrá, evidentemente, mantener invariante su forma ante una transformación ortogonal tridimensional. *La invariancia de una ley física ante una rotación del sistema de coordenadas espaciales exige la covariancia de los términos de la ecuación ante las transformaciones ortogonales tridimensionales.*

Ahora bien, hemos identificado la transformación de Lorentz restringida como transformación ortogonal en el espacio de Minkowski o universo. Ya hemos manejado escalares y vectores en este espacio de cuatro dimensiones. Podemos establecer en este espacio análogamente, tensores de otros órdenes con propiedades de transformación que sean generalizaciones obvias de las transformaciones tridimensionales. Dichos tensores de diversos órdenes se denominarán *tensores de universo* y comenzarán en *escalares de universo*, *vectores de universo* (o *cuadrivectores*), etc. La invarianza de la forma de toda ley física ante la transformación de Lorentz quedará evidente de manera inmediata una vez se exprese en *forma cuatridimensional covariante*, siendo todos los términos tensores de universo del mismo orden. Una ley que no cumpla los requisitos del principio de equivalencia no se puede poner en forma covariante. Las propiedades de transformación en cuatro dimensiones de los términos de una ley física hacen, pues, las veces de piedra de toque para examinar su validez relativista.

El ejemplo más sencillo de cuadrivector es el vector de posición de un «punto» en el espacio de Minkowski, cuyas componentes son (x_1, x_2, x_3, x_4) . Como las cuatro coordenadas de un punto de universo nos dicen *dónde* ha sucedido algo en el espacio ordinario y *cuándo* ha sucedido, será tal vez más descriptivo llamar *suceso* a todo punto del espacio de cuatro dimensiones. Aun cuando al hablar del universo utilizaremos muchas veces la terminología tridimensional, conviene recordar las importantes

^{*} En esta utilización que de él hacemos, el término «covariante» no tiene nada que ver con «transformación covariante» expresión utilizada en § 7-3. Lamentablemente, este es otro ejemplo en el cual matemáticos y físicos utilizan un mismo término para dos conceptos totalmente distintos. Los dos convenios están demasiado afincados para que los intentemos cambiar ahora.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

La velocidad de universo tiene módulo constante, ya que la suma $u_\nu u_\nu$ viene dada por

$$u_\nu u_\nu = \frac{v^2}{1 - \beta^2} - \frac{c^2}{1 - \beta^2} = -c^2, \quad (7-75)$$

y por tanto es también del género temporal.

Puede demostrarse que la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} y la cantidad $ic\rho$, donde ρ es la densidad de carga eléctrica, constituyen también un cuadvivector, j_μ .^{*} La ecuación de continuidad para carga y corriente

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

se podrá escribir en el lenguaje del espacio de Minkowski en la forma

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (7-76)$$

Ya vimos (p. 358) que el operador cuadrigradiiente se transforma en el espacio de Minkowski como un cuadvivector,[†] ya que

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = L'_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = L_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (7-77)$$

en virtud de la condición de ortogonalidad de L . Luego el primer miembro de la ecuación (7-76) es la cuadrivirgencia de un cuadvivector, es decir, un escalar de universo y por tanto es invariante ante una transformación de Lorentz. Tenemos aquí un ejemplo de cómo al enunciar una ley de la Física en el lenguaje del espacio de Minkowski se puede poner bien de manifiesto su covarianza de Lorentz.

Otro ejemplo contiene el potencial vector y el potencial escalar del Electromagnetismo, los cuales forman juntos un cuadvivector $A_\mu \rightarrow (\mathbf{A}, i\phi)$. Si los potenciales cumplen la condición de Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (7-78)$$

^{*} j_μ es simplemente el cuadvivector $\rho_0 u_\mu$, donde ρ_0 es la densidad de carga en el sistema en el cual están en reposo las cargas, es decir, es la «densidad de carga propia». Véase Panofsky y Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, o Jackson, *Classical Electrodynamics*.

[†] En los espacios no cartesianos se transforma covariantemente (en el sentido de los matemáticos) y la ecuación (7-76) es, por tanto, el producto escalar de un vector covariante por un vector contravariante.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

El otro procedimiento intenta evitar la necesidad de utilizar una teoría física que se salga de la propia Mecánica; en él se *define* la fuerza diciendo que es la variación de cantidad de movimiento por unidad de tiempo, en todos los sistemas de Lorentz:

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i. \quad (7-89)$$

Sin embargo, la cantidad de movimiento indicada en (7-89) no es mv_i , sino una cierta generalización relativista que se reduce a dicha expresión en el límite de las velocidades pequeñas. Lewis y Tolman* han obtenido una expresión de la cantidad de movimiento relativista, independiente de la forma (7-83) de la ley de la fuerza, notando que una consecuencia invariante de Lorentz de la definición (7-89) es la conservación de la cantidad de movimiento en ausencia de fuerzas exteriores. Examinan el choque elástico de dos partículas y encuentran la forma de p_i tal que se conserve en la mencionada colisión para todos los sistemas de Lorentz. Pero habiendo aceptado (7-83) como forma de la ley de la fuerza, podemos hallar la cantidad de movimiento relativista y el significado de K_μ a un tiempo, escribiendo (7-83) en una forma que se parezca a (7-89) todo lo posible. De la relación entre τ y t , y de la definición de cuadrivelocidad, podemos escribir las componentes espaciales de la ecuación (7-83) en la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = K_i \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Comparando esta expresión con (7-89) vemos que el teorema de conservación de la cantidad de movimiento será invariante si definimos la cantidad de movimiento mediante la expresión

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7-90)$$

y que F_i y K_i estén relacionadas tal como indica la ecuación (7-87). Se observará que la ecuación (7-90) se reduce a mv_i cuando $\beta \rightarrow 0$. Los dos procedimientos conducen, pues, a la misma conclusión. La comparación de la ecuación (7-90) con la ecuación (7-74) que define la cuadrivelocidad demuestra que p_i constituye la parte espacial del llamado cuadvector cantidad de movimiento-energía:

$$p_v = mu_v. \quad (7-91)$$

* Véase R. D. Sard, *Relativistic Mechanics*, pp. 146-152.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

movimiento el sistema mediante una fuerza conocida.* A escala atómica o nuclear, la energía incidente del movimiento puede invertirse, por ejemplo, en la creación de una tercera partícula. En la Física moderna abundan ejemplos de este estilo; en el apartado siguiente encontraremos alguna de las cuestiones de Cinemática relativista referentes a tales choques. Desde luego, el proceso puede tener lugar en sentido opuesto —conversión de energía en reposo en energía de movimiento. El ejemplo más sorprendente a escala terrestre lo proporcionan probablemente las explosiones nucleares. De nuevo, la energía total T de un ingenio o arma nuclear se mantiene constante durante la explosión; se libera gran cantidad de energía cinética en virtud, solamente, de una disminución de la masa del contenido. A pesar de las espantosas energías que se producen, la pérdida de masa sólo es de alrededor del 0,1% de la masa original.

Formalmente, la relación entre la energía T y la cantidad de movimiento se expresa diciendo que el módulo del cuadvivector cantidad de movimiento-energía es constante:

$$p_\mu p_\mu = -m^2 c^2 = p^2 - \frac{T^2}{c^2}$$

de donde

$$T^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (7-100)$$

La ecuación (7-100) es la análoga relativista de la relación $T = p^2/2m$ de la Mecánica no relativista, con la diferencia de que en aquella T incluye la energía en reposo. De la definición de T (ec. 7-96) resulta evidente que la energía de una partícula con masa en reposo finita tiende a infinito cuando su celeridad tiende a la de la luz. Dicho de otro modo, se necesita una cantidad infinita de energía para aumentar la celeridad de una partícula material (o de una nave espacial) desde el reposo hasta la celeridad c de la luz en el vacío. Es esta otra prueba de que es imposible alcanzar o superar la celeridad de la luz en el vacío partiendo de cualquier celeridad finita inferior a c .†

7.7 CINEMÁTICA RELATIVISTA DE LAS COLISIONES Y DE SISTEMAS DE MUCHAS PARTÍCULAS

Las formulaciones de los apartados anteriores nos permiten generalizar relativísticamente

* Los cambios de masa que intervienen en tales choques macroscópicos son, desde luego, muy pequeños porque un joule de energía corresponde a una masa de sólo $1,1 \times 10^{-14}$ g.

† Se ha señalado que no violaría este enunciado el tener partículas *nacidas* con celeridades mayores que la de la luz en el vacío. Para tales «taquiones» la energía, en virtud de la ecuación (7-96), sólo podría ser real si la «masa» asociada a la partícula fuese imaginaria. De hecho, esto significa que un taquión está descrito por un parámetro real m' tal que la energía total venga dada por $T = m' c^2 / \sqrt{\beta^2 - 1}$. Las especulaciones acerca de la naturaleza de los taquiones y de sus interacciones han dado origen a un floreciente debate acerca de cómo podrían encajar en nuestros puntos de vista normales de la causalidad. Profundizar en este tema carecería de sentido por cuanto no hay absolutamente ninguna evidencia experimental, por el momento, de la existencia de dichas partículas.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

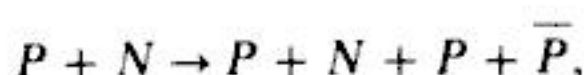


You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

esta energía umbral resulta ser

$$\frac{K_1}{m_1 c^2} = \frac{Q^2 + 2Q(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2}. \quad (7-108)$$

Un ejemplo común de la aplicación de la ecuación (7-108) lo encontramos en la histórica producción del antiprotón mediante la reacción



donde N es un nucleón, sea un neutrón o un protón. Las masas de todas las partículas que intervienen son casi iguales a 938 MeV de energía de la masa en reposo equivalente y $Q = 2m$. La ecuación (7-108) dice, pues, que la energía cinética en el umbral de la partícula incidente debe ser

$$K_1 = 6mc^2 = 5,7 \text{ GeV},$$

que es el triple de la energía representada por Q . En cambio, si la reacción la iniciaran dos nucleones incidentes uno contra otro con velocidades iguales y opuestas, el sistema del laboratorio sería el mismo que el sistema C-D-M. Toda la energía cinética está disponible en este caso para pasar a la producción del par protón-antiprotón y cada una de las partículas incidentes en el umbral necesitan tener una energía cinética de movimiento equivalente, tan sólo, a la masa de un protón, o sea 938 MeV. No nos extrañan los sacrificios que se hacen para construir máquinas que den haces para colisiones.

Otro ejemplo instructivo de cálculo de umbral lo tenemos en la producción de fotomesones, por ejemplo, mediante la reacción

$$\gamma + P = \Sigma^0 + K^+, \quad (7-109)$$

donde γ representa un fotón. Para los fines de la Mecánica clásica, un fotón es una partícula de masa nula que tiene una cantidad de movimiento espacial 0p y una energía 0pc .* Al calcular Q , la masa de m_1 es cero:

$$Q = (\Sigma^0 + K^+ - P) = 748 \text{ MeV}.$$

* El cuadrado del módulo del cuadvivector cantidad de movimiento energía del fotón es cero; se dice a veces que el vector es «del género luz». El teorema del centro de masa (p. 381) sólo puede fallar si todas las partículas son fotones e incluso en tal caso, si los fotones se mueven todos en la misma dirección y sentido.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

en función de sus propiedades incidentes:

$$T_3 = T_1 - \gamma^2 \beta (1 - \cos \Theta) (p_1 c - \beta T_1). \quad (7-118)$$

En la ecuación (7-118), γ y β deben expresarse en función de las cantidades incidentes con ayuda de las ecuaciones (7-113) y (7-114), con lo que resulta la relación

$$\gamma^2 \beta (p_1 c - \beta T_1) = \frac{m_2 p_1^2 c^2}{2m_2 T_1 + (m_1^2 + m_2^2) c^2}.$$

Teniendo en cuenta la relación existente entre p_1 y T_1 (ec. 7-100), podemos escribir esta relación en la forma

$$\gamma^2 \beta (p_1 c - \beta T_1) = \frac{m_2 K_1 (K_1 + 2m_1 c^2)}{2m_2 K_1 + (m_1 + m_2)^2 c^2}. \quad (7-119)$$

Con algunas manipulaciones algebraicas, podremos escribir la ecuación (7-118) en la forma

$$\frac{K_3}{K_1} = 1 - \frac{2\rho(1 + \mathcal{E}_1/2)}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1} (1 - \cos \Theta), \quad (7-120)$$

donde $\rho = m_2/m_1$, como en § 3-11 para la dispersión elástica y \mathcal{E}_1 es la energía cinética de la partícula incidente expresada en unidades de la energía de la masa en reposo,

$$\mathcal{E}_1 = \frac{K_1}{m_1 c^2}. \quad (7-121)$$

La ecuación (7-120) es la contrapartida relativista de la ecuación (3-117'). Fácil es ver que la ecuación (7-120) se reduce al caso no relativista cuando $\mathcal{E}_1 \rightarrow 0$ y que si $\rho = 1$ (masas iguales), las correcciones relativistas se destruyen. La ecuación (7-120) implica que la mínima energía después de la dispersión, en unidades de $m_1 c^2$, venga dada por

$$(\mathcal{E}_3)_{\min} = \mathcal{E}_1 \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2 + 2\rho\mathcal{E}_1}. \quad (7-122)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

que tiene a la ecuación (1-11) como forma límite no relativista.

En el caso de un sistema que contenga muchas partículas, podemos definir un caudritensor (análogamente a como se hizo con el cuadvivector cantidad de movimiento-energía total) en la forma

$$M_{\mu\nu} = \sum_s m_{s\mu\nu}, \quad (7-131)$$

donde el índice s denota la partícula s -ésima. Formar una ecuación de movimiento para $M_{\mu\nu}$ resulta más difícil porque cada partícula tiene su tiempo propio particular. (Por la misma razón, no lo vamos a intentar ni para P_μ .) Ahora bien, podremos dar razonamientos plausibles para la conservación de $M_{\mu\nu}$ en determinadas circunstancias. Si el sistema está totalmente aislado y las partículas no se ejercen interacciones entre sí ni con el mundo exterior (incluidos los campos), en virtud de la ecuación (7-130) se conservará $m_{\mu\nu}$ para cada partícula y en consecuencia, también se conservará $M_{\mu\nu}$. Incluso si las partículas se ejercen interacciones, pero éstas sólo tienen lugar mediante colisiones binarias en un punto, aun habría conservación según podemos ver a través del razonamiento siguiente. En el instante en que chocan las dos partículas, están moviéndose juntas y tienen el mismo tiempo propio. (Dicho de otro modo, se cortan sus líneas de universo y comparten el mismo suceso.) Podemos, pues, escribir una ecuación de movimiento de la forma de la (7-130) para la suma de sus momentos cinéticos. Si las fuerzas impulsivas de contacto son iguales y opuestas —como sería de esperar de la conservación de la cantidad de movimiento en el choque— la suma de los momentos impulsivos será nula. Por tanto, en tales choques se conservará también el momento cinético relativista. Notemos que, a diferencia de lo que sucede en el caso no relativista, las interacciones deben limitarse a choques puntuales instantáneos.

El momento cinético relativista obedece al mismo tipo de teorema referente a la traslación del punto de referencia que se cumple en su contrapartida no relativista. En la definición (ecs. 7-128 ó 7-131), el punto de referencia (en realidad el «suceso» de referencia) es el origen arbitrario del sistema de Lorentz. Respecto a otro suceso de referencia a_λ , el momento cinético total es

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}(a_\lambda) &= \sum_s [(x_{s\mu} - a_\mu)p_{sv} - (x_{sv} - a_\nu)p_{s\mu}], \\ &= M_{\mu\nu}(0) - (a_\mu P_\nu - a_\nu P_\mu). \end{aligned} \quad (7-132)$$

Al igual que en el caso no relativista, la variación de las componentes del momento cinético es igual al momento cinético, respecto al origen, que tendría todo el sistema si estuviera concentrado en a_λ .

En el capítulo 1 había un punto de referencia particular que desempeñaba un papel importante: el centro de masa. Podemos encontrar ahora algo parecido, al menos en un sistema de Lorentz, examinando la naturaleza de las tres componentes no espaciales de



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Si la partícula parte del reposo en el origen de manera que $x_0 = 0$ y $v_0 = 0 = \alpha$, la ecuación (7-144) podrá escribirse en la forma

$$\left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{a^2},$$

que es la ecuación de una hipérbola en el plano x, t . (En iguales condiciones, el movimiento no relativista es, desde luego, una parábola en el plano x, t .) El límite no relativista se obtiene a partir de la ecuación (7-144) considerando $(at + \alpha)$ pequeño frente a c ; se obtiene fácilmente la fórmula para novato en Física de x en función de t , dándonos cuenta que en este límite $\alpha \rightarrow v_0$.

El movimiento descrito en este ejemplo nos lo encontramos en situaciones más o menos reales. Por ejemplo, corresponde a la aceleración de electrones a celeridades relativistas en el sistema del laboratorio por medio de un campo eléctrico constante y uniforme. La ilustración que vamos a considerar a continuación es más académica pero tiene interés como ejemplo de las técnicas que se utilizan:

2. *Oscilador armónico unidimensional relativista*. En este caso, la lagrangiana es de la forma indicada en la ecuación (7-136) siendo

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (7-145)$$

Como entonces L no es explícitamente función del tiempo y no depende de la velocidad, la energía total E es constante. De la ecuación (7-140) podemos despejar la velocidad y tenemos

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 1 - \frac{m^2 c^4}{(E - V)^2}. \quad (7-146)$$

De momento no vamos a sustituir la forma particular de $V(x)$ y generalizaremos ligeramente el problema de manera que incluya un potencial cualquiera que comparta las características cualitativas de la ecuación (7-145). Así pues, supongamos que $V(x)$ es una función potencial cualquiera simétrica respecto al origen y que presente un mínimo en él. En tal caso, si E está comprendida entre $V(0)$ y el máximo de V , el movimiento será oscilatorio entre los límites $x = -b$ y $x = +b$, determinados por

$$V(\pm b) = E.$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Así pues, si se satisfacen tres cualesquiera de las ecuaciones de Lagrange (7-157) resultará, tan sólo a consecuencia de la propiedad de ser homogénea Λ , que la cuarta se satisface idénticamente.

Atrevámonos a efectuar esta transformación para el caso de una partícula libre. Según la ecuación (7-136), la lagrangiana «no covariante» para la partícula libre es

$$L = -mc\sqrt{c^2 - \dot{x}_c \dot{x}_i}.$$

En virtud de la transformación dada en la ecuación (7-159), una posible lagrangiana covariante sería entonces*

$$\Lambda = -mc\sqrt{-x'_\mu x'_\mu}. \quad (7-162)$$

Con esta lagrangiana, las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{mcx'_\nu}{\sqrt{-x'_\mu x'_\mu}} \right) = 0.$$

El parámetro θ debe ser una función monótona del tiempo propio τ con lo que las derivadas respecto a θ están relacionadas con las derivadas en función de τ mediante la expresión

$$x'_\nu \equiv \frac{dx_\nu}{d\theta} = \frac{d\tau}{d\theta} u_\nu.$$

Luego, las ecuaciones de Lagrange corresponden a

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{mcu_\nu}{\sqrt{-u_\nu u_\nu}} \right) = \frac{d(mu_\nu)}{d\tau} = 0,$$

que son las ecuaciones (7-83) para una partícula libre. Según vimos anteriormente, la cuarta de estas ecuaciones nos dice que la energía cinética T se conserva (cfr. ec. 7-95), cosa que no es nueva pero que puede deducirse de las otras tres ecuaciones.

Hemos llegado así a un método lagrangiano covariante que funciona, al menos para

* En las manipulaciones algebraicas que llevan a la ecuación (7-162) hay una ambigüedad de signo que debemos decidir de tal manera que $L dt$ tenga el mismo valor que $\Lambda d\theta$. El paso final de la deducción deberá escribirse en la forma

$$\Lambda = imc\sqrt{x_4'^2 + x_j'x_j'} = -mc\sqrt{(-i)^2 x_4'^2 + x_j'x_j'} = -mc\sqrt{-x_\mu'x_\mu'}.$$

Notemos también que la elección de la métrica especial definida por la ecuación (7-53) eliminaría el signo menos en la cantidad subradical, pero a expensas de otras complicaciones en la notación.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Capítulo 8

Ecuaciones de movimiento de Hamilton

La formulación de Lagrange de la Mecánica se ha desarrollado en gran manera en los dos primeros capítulos y la mayor parte de lo tratado después se ha referido a aplicaciones dentro del marco del método de Lagrange. En este capítulo reasumimos el desarrollo formal de la Mecánica prestando atención a otra representación de la estructura de la teoría conocida por el nombre de formulación de Hamilton. No se añade nada nuevo a la Física que interviene; sólo obtenemos otro método (más potente) para trabajar con los principios físicos ya establecidos. Los métodos de Hamilton no son particularmente superiores a las técnicas de Lagrange en la solución directa de problemas mecánicos. La utilidad del punto de vista de Hamilton consiste, más bien, en proporcionar un marco para extensiones teóricas en muchos campos de la Física. En la Mecánica clásica constituye la base para desarrollos ulteriores, tales como la teoría de Hamilton-Jacobi y los métodos de perturbaciones. Fuera de la Mecánica clásica, la formulación de Hamilton proporciona gran parte del lenguaje con el cual se construyen la Mecánica estadística y la Mecánica cuántica de hoy en día. En los capítulos que siguen vamos a suponer que los sistemas mecánicos son holónomos y las fuerzas monógenas, es decir, que derivan o de un potencial que sólo depende de la posición, o de potenciales generalizados dependientes de la velocidad, del tipo tratado en § 1-5.

8-1 TRANSFORMACIONES DE LEGENDRE Y ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE HAMILTON

En la formulación de Lagrange no relativista, un sistema con n grados de libertad posee n ecuaciones de movimiento de la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (8-1)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

que H debe siempre expresarse en función de q , p (y posiblemente t). Es para hacer resaltar esta diferencia de comportamiento funcional por lo que se han dado símbolos diferentes a las cantidades aun cuando tengan iguales valores numéricos.

Nominalmente, deberemos construir la hamiltoniana para cada problema a través de la formulación de Lagrange. El método formal requiere una larga secuencia de pasos:

1. Elegido un sistema de coordenadas generalizadas, q_i , se construye la lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$
2. Mediante las ecuaciones (8-2) se definen las cantidades de movimiento conjugadas en función de q_i , \dot{q}_i , y t .
3. Se utiliza la ecuación (8-8) para formar la hamiltoniana. En este momento tenemos h en vez de H , o más bien una función mixta de q_i , \dot{q}_i , p_i y t .
4. Se invierten entonces las ecuaciones (8-2) para obtener las \dot{q}_i en función de (q, p, t) . Más adelante trataremos algunas posibles dificultades de la inversión.
5. Se aplican los resultados del paso anterior para eliminar de H las \dot{q} de manera que quede expresada tan sólo en función de (q, p, t) .

Ahora estamos listos para utilizar la hamiltoniana en las ecuaciones canónicas de movimiento.

En muchos sistemas físicos es posible abreviar la secuencia que acabamos de describir. Según vimos en § 2-6, en muchos problemas la lagrangiana es una suma de funciones cada una homogénea en las velocidades generalizadas de grado 0, 1 y 2, respectivamente. En tal caso, según lo prescrito en la ecuación (8-8), H vendrá dada por (cfr. ec. 2-57)

$$H = L_2 - L_0, \quad (8-14)$$

donde L_0 es la parte de la lagrangiana independiente de las velocidades generalizadas y L_2 es la parte que es homogénea de segundo grado en \dot{q}_i . Además, si las ecuaciones que definen las coordenadas generalizadas no dependen explícitamente del tiempo, será $L_2 = T$ y si las fuerzas derivan de un potencial conservativo V , será $L_0 = -V$. Cuando se cumplan estas dos condiciones, la hamiltoniana será automáticamente la energía total:

$$H = T + V = E. \quad (8-15)$$

Si se cumple la ecuación (8-14) o la (8-15), se eliminará gran parte de las transformaciones algebraicas del tercero de los pasos antes indicados.

Podemos dar un paso más. En clases extensas de problemas sucede que L_2 es función cuadrática de las velocidades generalizadas y L_1 es función lineal de esas mismas variables. Las transformaciones algebraicas correspondientes a los pasos entre el 2 y el 5 podrán entonces efectuarse, al menos formalmente, de una vez por todas. Para ver esto coloquemos las \dot{q}_i formando una matriz columna $\dot{\mathbf{q}}$. Con las hipótesis citadas, podremos escribir la lagrangiana en la forma

$$L(q, \dot{q}, t) = L_0(q, t) + \dot{\mathbf{q}}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}}. \quad (8-16)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

matriz (no tiene ningún nombre normalizado) es una especie de versión $2n \times 2n$ del producto de i por la matriz de Pauli σ_2 (cfr. ec. 4-74) y por tanto, su cuadrado será la matriz $2n \times 2n$ unidad, cambiada de signo:

$$\mathbf{J}^2 = -\mathbf{1}. \quad (8-32)$$

Es también ortogonal:

$$\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{J} = \mathbf{1} \quad (8-33)$$

con lo cual

$$\tilde{\mathbf{J}} = -\mathbf{J} = \mathbf{J}^{-1}. \quad (8-34)$$

De su ortogonalidad se deduce que el cuadrado de su determinante es 1, si bien se puede probar (cfr. Ejercicio 25) la afirmación más fuerte:

$$|\mathbf{J}| = +1. \quad (8-34')$$

8-2 COORDENADAS CÍCLICAS Y TEOREMAS DE CONSERVACIÓN

Según la definición dada en § 2-6, una coordenada cíclica q_j es la que no aparece explícitamente en la lagrangiana; en virtud de las ecuaciones de Lagrange, su cantidad de movimiento conjugada p_j será constante. Ahora bien, la comparación de la ecuación (8-9) con la (8-10) ya nos ha dicho que

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Una coordenada que sea cíclica estará, pues, también ausente en la hamiltoniana.* Inversamente, si en H no aparece una coordenada generalizada, se conservará la cantidad de movimiento conjugada. Los teoremas de conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético de § 2-6 podrán, pues, pasar a la formulación de Hamilton sin más que sustituir L por H . En particular, la relación entre la invarianza o propiedades de simetría del sistema físico y las constantes del movimiento, también podrán deducirse en función de la hamiltoniana. Por ejemplo, si un sistema está totalmente autocontenido, con sólo fuerzas internas entre las partículas, se podrá mover como conjunto rígido sin afectar a las fuerzas o al movimiento subsiguiente. Se dice entonces que el sistema es invariante ante un desplazamiento rígido. Por tanto, una coordenada generalizada que describa dicho movimiento rígido no figurará explícitamente en la hamiltoniana y se conservará la cantidad de movimiento conjugada correspondiente. Si el movimiento rígido es una

* Esta conclusión también se deduce de la definición dada por la ecuación (8-8), ya que H sólo difiere de $-L$ en $p_i \dot{q}_i$, que no contiene explícitamente a q_i .



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

exponenciales oscilatorias de la forma de la ecuación (6-9), con pulsaciones ω que sean las raíces del determinante secular:

$$|\mathbf{c} + i\omega\mathbf{b} - \omega^2\mathbf{a}| = 0. \quad (8-53)$$

(cfr. ec. 6-11). A pesar de aparecer términos lineales en ω puede demostrarse* a partir de la antisimetría de \mathbf{b} y de la simetría de las otras matrices que la ecuación secular es función de ω^2 solamente (como era de esperar en base a razonamientos físicos a partir de la simetría ante la inversión del tiempo). Si las raíces de la ecuación (8-53) corresponden a ω real, las desviaciones respecto al estado estacionario podrán estar acotadas y será posible la estabilidad. Los valores imaginarios de ω pueden conducir a un incremento de ρ ilimitado en el transcurso del tiempo, lo que indicaría inestabilidad del movimiento estacionario.

Debemos reconocer que estas afirmaciones dan una imagen demasiado simplificada del problema general de la estabilidad del movimiento. Hay muchas complicaciones, las menores de las cuales son las cuestiones acerca de la naturaleza del movimiento cuando la ecuación (8-53) tenga raíces múltiples o nulas. Más importante es la incertidumbre de hasta qué punto pueden las ecuaciones de movimiento linealizadas (8-52) representar las oscilaciones incluso para el caso de amplitudes pequeñas y representar la naturaleza de las soluciones alineales. El tema general de la estabilidad del movimiento constituye aún hoy un campo de investigación muy activo en el que se utilizan a menudo herramientas matemáticas muy sofisticadas que se salen del ámbito de este libro.

Con un ejemplo sencillo, casi trivial, podemos aclarar el método de Routh y el significado físico de las cantidades que intervienen. Consideremos el caso estudiado en § 3-6, de una partícula que se mueve en un plano bajo la influencia de una fuerza central $f(r)$ que deriva de un potencial $V(r)$. La lagrangiana será

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r).$$

Tal como hicimos notar antes, la coordenada ignorable es θ y si representamos por l la cantidad de movimiento conjugada, la correspondiente routhiana será

$$R = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) - \frac{m}{2}\dot{r}^2.$$

Vemos físicamente que la routhiana es el potencial equivalente unidimensional $V(r)$ menos la energía cinética del movimiento radial. (El signo menos aparece porque la routhiana definida por la ecuación 8-42 es la lagrangiana del problema unidimensional efectivo cambiada de signo.) En el movimiento estacionario, la coordenada no cíclica r es

* Véase K. R. Symon, *Mechanics*, 3.^a ed. (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1971), p. 483.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

En la hamiltoniana correspondiente desaparece el término en u_μ como es habitual y la parte restante L_2 en función de las cantidades de movimiento canónicas es

$$\mathbb{H} = \frac{\left(p_\mu - \frac{q}{c}A_\mu\right)\left(p_\mu - \frac{q}{c}A_\mu\right)}{2m} \quad (8-62)$$

Las dos hamiltonianas (ec. 8-61 y 8-62) son constantes, de igual valor, $-mc^2/2$, pero para obtener las ecuaciones de movimiento lo que importa es la dependencia *funcional* de los cuadvectores de posición y de cantidad de movimiento. Con un sistema de una partícula, la hamiltoniana covariante conduce a ocho ecuaciones de movimiento de primer orden

$$\frac{dx_\nu}{d\tau} = \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{d\tau} = -\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial x_\nu} \quad (8-63)$$

Sabemos que estas ecuaciones no pueden ser todas independientes. Las partes espaciales de las ecuaciones (8-63) conducen evidentemente a las ecuaciones de movimiento espaciales. Podríamos, pues, esperar que las dos ecuaciones restantes no nos digan nada nuevo, exactamente como en el caso lagrangiano. Podemos comprobar esto examinando las ecuaciones $\nu = 4$ en un cierto sistema particular de Lorentz. Una de ellas es la ecuación constitutiva de p_4 :

$$u_4 = \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial p_4} = \frac{1}{m} \left(p_4 - \frac{q}{c} A_4 \right)$$

o sea

$$p_4 = \frac{i}{c} (T + q\phi) = \frac{iH}{c},$$

conclusión general que ya habíamos observado. La otra se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dp_4}{dt} = -\frac{1}{ic} \frac{\partial \mathbb{H}}{\partial t}$$

o sea

$$\frac{dH}{dt} = \sqrt{1-\beta^2} \frac{\partial H}{\partial t}.$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

del principio variacional. Supongamos, por ejemplo, que restamos del integrando de la ecuación (8-65) la cantidad

$$\frac{d}{dt}(q_i p_i).$$

El principio de Hamilton modificado diría entonces

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{p}_i q_i - H(q, p, t)) dt = 0. \quad (8-71)$$

Aquí, el integrando f de la ecuación (8-66) es función de \dot{p} y se comprueba fácilmente que las ecuaciones de Euler-Lagrange (8-67) y (8-68) con esta f corresponden de nuevo a las ecuaciones de movimiento de Hamilton (8-12). Con todo, el integrando de la ecuación (8-71) no es la lagrangiana ni puede, en general, estar relacionado con ella mediante una transformación puntual en el espacio de configuraciones. Restringiendo a cero la variación de q y de p en los puntos extremos, el principio de Hamilton modificado proporciona una vía independiente y general para establecer las ecuaciones de movimiento de Hamilton sin formulación previa de la lagrangiana. Si queremos, podemos suprimir la necesidad de conexión entre las variables canónicas hamiltonianas y el correspondiente sistema lagrangiano de coordenadas y velocidades generalizadas. Esto nos va a resultar muy importante en el capítulo siguiente donde examinaremos transformaciones de variables del espacio fásico que conservan la forma hamiltoniana de las ecuaciones de movimiento.

El requisito de variación independiente para q y para p , tan esencial para la deducción anterior ilumina la diferencia fundamental existente entre las formulaciones de Lagrange y de Hamilton. Ni las coordenadas q_i ni las cantidades de movimiento p_i se ha de considerar aquí que constituyan el sistema de variables más fundamental; ambos son igualmente independientes. Solamente ampliando el campo de variables independientes de n cantidades a $2n$ hemos podido obtener ecuaciones de movimiento que sean de primer orden. En cierto sentido, los nombres de «coordenadas» y «cantidades de movimiento» son poco afortunados ya que nos sugieren la idea de coordenadas espaciales y de cantidades de movimiento o, como máximo, momentos cinéticos. A dichos términos hay que darles ahora un significado más amplio. La división en coordenadas y cantidades de movimiento o momentos cinéticos sólo corresponde a una separación de las variables independientes que describen el movimiento, en dos grupos que tienen una relación casi simétrica uno respecto a otro a través de las ecuaciones de Hamilton.

8-6 PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN

Otro principio variacional asociado a la formulación de Hamilton es el llamado *principio de mínima acción*. Contiene un nuevo tipo de variación, que llamaremos variación Δ , que exige una explicación detallada. En el proceso de variación δ utilizado en el estudio del principio de Hamilton en el capítulo 2, el camino variado en el espacio de las configuraciones terminaba siempre en puntos extremos que representaban la configura-



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

(8-83).* Se construye así un espacio de configuraciones para el cual los coeficientes M_{jk} forman el tensor métrico. En general, el espacio será curvo y no ortogonal. El elemento de longitud en dicho espacio estará entonces definido por (cfr. ec. 6-24)

$$(d\rho)^2 = M_{jk} dq_j dq_k \quad (8-86)$$

con lo que la energía cinética tendrá la forma

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2, \quad (8-87)$$

o, lo que es equivalente,

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{T}}. \quad (8-88)$$

La ecuación (8-88) nos permite un cambio de variable en la integral de acción abreviada consistente en pasar de t a ρ y el principio de mínima acción quedará en la forma

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0 = \Delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{T} d\rho,$$

o, finalmente

$$\Delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{H - V(q)} d\rho = 0. \quad (8-89)$$

À la ecuación (8-89) se le da a menudo el nombre de *forma de Jacobi del principio de mínima acción*. Se refiere al camino del punto figurativo del sistema en un espacio de configuraciones curvo especial caracterizado por el tensor métrico de elementos M_{jk} . El punto figurativo del sistema recorre el camino en este espacio de configuraciones con una celeridad dada por $\sqrt{2T}$. Si sobre el cuerpo no se ejercen fuerzas, T es constante y el principio de Jacobi dice que el punto figurativo del sistema se mueve a lo largo del camino más corto en el espacio de configuraciones. Dicho de otro modo equivalente, el movimiento del sistema es tal que su punto figurativo se mueve a lo largo de las geodésicas del espacio de configuraciones.

Debemos insistir en que la forma de Jacobi del principio de mínima acción se ocupa del *camino* del punto figurativo y no de su movimiento en el *tiempo*. La ecuación (8-89) es

* Los elementos de T eran independientes de los desplazamientos η_i respecto a las posiciones de equilibrio. Ahora los elementos M_{jk} son, en general, funciones de las q . Sin embargo, la diferencia no afecta a la formulación en absoluto.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

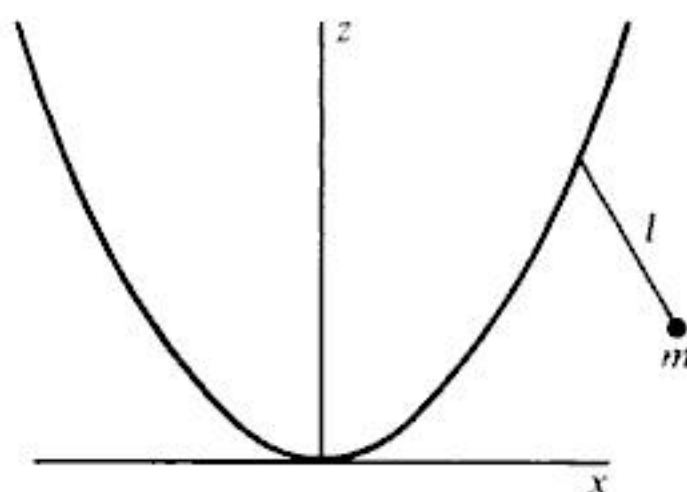
donde a , b , α y k son constantes.

- Hallar una lagrangiana que corresponda a esta hamiltoniana.
- Hallar una lagrangiana equivalente que no dependa explícitamente del tiempo.
- ¿Cuál es la hamiltoniana correspondiente a esta segunda lagrangiana y qué relación existe entre las dos hamiltonianas?

7. Hallar la hamiltoniana para el sistema descrito en el ejercicio 13 del capítulo 5 y obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton para el sistema. Para hallar la hamiltoniana, utilizar tanto el método directo como el matricial.

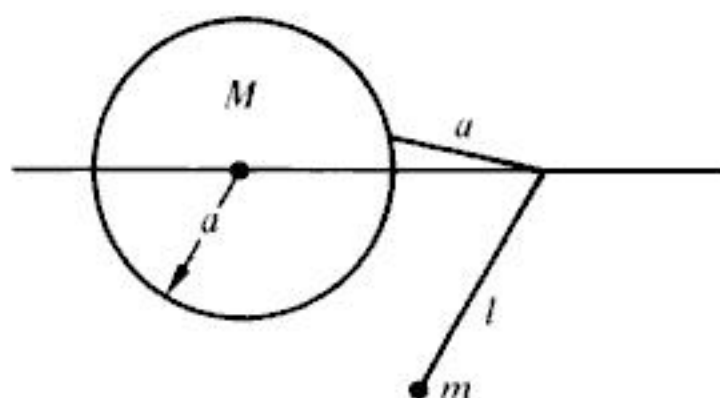
8. Repetir el ejercicio anterior, con la diferencia de que ahora se permite que el péndulo se mueva en tres dimensiones, es decir, sea un péndulo esférico cargado por resorte. Puede utilizarse el método directo o el matricial.

9. El punto de suspensión de un péndulo simple de longitud l y masa m está obligado a moverse a lo largo de una parábola $z = ax^2$ situada en un plano vertical. Deducir una hamiltoniana que rijas el movimiento del péndulo y de su punto de suspensión. Obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton.



10. Obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton para un péndulo plano de longitud l y masa puntual m cuyo radio de suspensión gire uniformemente a lo largo de una circunferencia vertical de radio a . Describir físicamente la naturaleza de la cantidad de movimiento canónica y de la hamiltoniana.

11. a) El punto de suspensión de un péndulo simple plano de masa m y longitud l está obligado a moverse a lo largo de una pista horizontal y está conectado a un punto de la periferia de un volante uniforme de masa M y radio a mediante una biela sin masa cuya longitud es también a , tal como se indica en la figura. El volante gira alrededor de un centro fijo en la pista. Hallar una hamiltoniana para el sistema combinado y las ecuaciones de movimiento de Hamilton.





You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

y como la hamiltoniana no puede ser función explícita ni del tiempo ni de las coordenadas cíclicas, podrá escribirse en la forma

$$H = H(\alpha_1 \dots \alpha_n).$$

En consecuencia, las ecuaciones de Hamilton para \dot{q}_i serán simplemente

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i, \quad (9-1)$$

donde las ω_i son funciones tan sólo de las α_i y por tanto son también constantes en el tiempo. Las ecuaciones (9-1) tienen las soluciones inmediatas

$$q_i = \omega_i t + \beta_i, \quad (9-2)$$

donde las β_i son constantes de integración, determinadas por las condiciones iniciales.

Podría parecer que la solución de este tipo de problema, por lo fácil que es, sólo pueda ser de interés académico ya que raramente se encontrará en la práctica que todas las coordenadas generalizadas sean cíclicas. Pero un sistema dado puede describirse por más de un sistema de coordenadas generalizadas. Así, para estudiar el movimiento de una partícula en un plano se pueden tomar como coordenadas generalizadas o bien las coordenadas cartesianas

$$q_1 = x, \quad q_2 = y,$$

o bien las coordenadas polares planas

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta.$$

Ambas elecciones son igualmente válidas, si bien podrá ser más conveniente uno u otro sistema para el problema que se considere. Observemos que en el caso de fuerzas centrales no son cíclicas ni x ni y , mientras que el segundo sistema contiene una coordenada cíclica, cual sería el ángulo θ . Así pues, el número de coordenadas cíclicas depende de la elección de las coordenadas generalizadas y para cada problema puede haber una elección particular para la cual todas las coordenadas sean cíclicas. Si podemos hallar tal sistema, lo que queda por hacer es trivial. Como las coordenadas generalizadas obvias sugeridas por el problema no serán normalmente cíclicas, debemos deducir primeramente un método específico para *pasar* de un sistema de variables a otro que pueda ser más conveniente.

Las transformaciones consideradas en los capítulos anteriores entrañaban pasar de un sistema de coordenadas q_i a un nuevo sistema Q_i mediante ecuaciones de transformación de la forma

$$Q_i = Q_i(q, t). \quad (9-3)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

transformación) y podrán a veces haber otras ambigüedades.

Sucede a veces que no es adecuado describir la transformación canónica mediante una función generatriz del tipo $F_1(q, Q, t)$. Por ejemplo, la transformación puede ser tal que no se pueda escribir las p_i en función de q, Q y t sino en función de q, P y t . En tal caso, buscaríamos una función generatriz que sea función de las coordenadas antiguas q y de las cantidades de movimiento nuevas P . Evidentemente, en tal caso deberemos sustituir la ecuación (9-13) por una relación equivalente que contenga las \dot{P}_i en vez de las \dot{Q}_i . Podemos lograr esto escribiendo la F de la ecuación (9-11) en la forma

$$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i. \quad (9-15)$$

Sustituyendo esta F en la ecuación (9-11) llegamos a

$$p_i \dot{q}_i - H = -\dot{Q}_i P_i - K + \frac{d}{dt} F_2(q, P, t). \quad (9-16)$$

De nuevo, desarrollaremos la derivada total de F_2 y reagruparemos los coeficientes de \dot{q}_i y P_i con lo que llegaremos a las ecuaciones

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad (9-17a)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad (9-17b)$$

con

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (9-17c)$$

Como antes, de las ecuaciones (9-17a) habremos de obtener P_i en función de q_j, p_j y t , para corresponder a la segunda mitad de las ecuaciones de transformación (9-4). La otra mitad de las ecuaciones de transformación nos la darán las ecuaciones (9-17b).

Los métodos correspondientes para los dos restantes tipos generales de funciones generatrices resultan ahora evidentes. Una función generatriz F_3 de las antiguas cantidades de movimiento p_i , las nuevas coordenadas Q_i y el tiempo t se define haciendo

$$F = q_i p_i + F_3(p, Q, t), \quad (9-18)$$

en función de la cual, la ecuación (9-11) queda en la forma

$$-q_i \dot{p}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt} F_3(p, Q, t). \quad (9-19)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

del tiempo, no conteniendo las cantidades de movimiento antiguas. Una tal transformación será, pues, ejemplo de la clase de transformaciones puntuales definida por las ecuaciones (9-3). Para definir una transformación puntual, las funciones f_i deben ser independientes e invertibles, por lo que las q_j se podrán expresar en función de las Q_i . Como, por otra parte, las f_i son totalmente arbitrarias, podemos concluir que *todas las transformaciones puntuales son canónicas*. La ecuación (9-17c) da la nueva hamiltoniana en función de la antigua y de las derivadas respecto al tiempo de las funciones f_i .

Deberíamos hacer notar que la F_2 dada por la ecuación (9-26) no es la única función generatriz que conduce a la transformación puntual especificada por las f_i . Evidentemente, la misma transformación puntual está implícita en la forma más general

$$F_2 = f_i(q_1, \dots, q_n; t)P_i + g(q_1, \dots, q_n, t), \quad (9-28)$$

donde $g(q, t)$ es una función (diferenciable) cualquiera de las coordenadas antiguas y del tiempo. Las ecuaciones de transformación (9-27) para las coordenadas, se mantienen inalteradas ante esta función generatriz. Pero las ecuaciones de transformación para las cantidades de movimiento son diferentes en una y otra forma. De las ecuaciones (9-17a) tenemos

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} P_i + \frac{\partial g}{\partial q_j}, \quad (9-29)$$

utilizando la forma F_2 dada por la ecuación (9-28). Estas ecuaciones se pueden invertir para dar P en función de (q, p) con gran facilidad, escribiéndolas en notación matricial:

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}}, \quad (9-29')$$

Aquí, \mathbf{p} , \mathbf{P} y $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}}$ son matrices columna (o fila) de n elementos y $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$ es una matriz cuadrada cuyo elemento ij -ésimo es $\frac{\partial f_i}{\partial q_j}$. Se deduce entonces que \mathbf{P} es una función lineal de \mathbf{p} dada por

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{p} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1}. \quad (9-30)$$

Así, las ecuaciones de transformación para Q son independientes de g y sólo dependen de las $f_i(q, t)$, pero las ecuaciones de transformación para P sí dependen de la forma de g y son, en general, función tanto de las coordenadas como de las cantidades de movimiento antiguas. La función generatriz dada por la ecuación (9-26) sólo es un caso particular de



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Por otra parte, la inversión de las ecuaciones (9-44),

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(Q, P), \\ p_j &= p_j(Q, P), \end{aligned} \quad (9-46)$$

nos permite considerar $H(q, p, t)$ como función de Q y P y formar la derivada parcial

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i}. \quad (9-47)$$

Comparando las ecuaciones (9-45) y (9-47) podemos sacar la conclusión de que

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i},$$

es decir, la transformación será canónica solamente si

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P}, \quad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right)_{Q,P}. \quad (9-48a)$$

Los subíndices de las derivadas sirven para recordarnos que en el primer miembro de estas ecuaciones se considera que Q_i es función de (q, p) (cfr. ec. 9-44), mientras que en los segundos miembros las derivadas son de q_j y p_j funciones de (Q, P) (cfr. ec. 9-46). Una comparación análoga de \dot{P}_i con la derivada parcial de H respecto a Q_j conduce a las condiciones

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right)_{q,p} = - \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right)_{Q,P}, \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j} \right)_{q,p} = \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right)_{Q,P}. \quad (9-48b)$$

Los sistemas de ecuaciones (9-48) juntos reciben a veces el nombre de «condiciones directas» para una transformación canónica (restringida).

La manipulación algebraica que conduce a las ecuaciones (9-48) se puede efectuar de manera compacta y elegante si utilizamos la notación simpléctica para la formulación de Hamilton introducida al final de §8-1. Si es η una matriz columna con los $2n$ elementos q_i, p_i , recordemos que las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir en la forma

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta}. \quad (8-31)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Por ser antisimétrica \mathbf{J} , la traspuesta de \mathbf{M} es

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{1} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} \mathbf{J}. \quad (9-66)$$

La condición simpléctica entraña el valor del producto de matrices

$$\mathbf{M} \mathbf{J} \tilde{\mathbf{M}} = \left(\mathbf{1} + \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} \right) \mathbf{J} \left(\mathbf{1} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} \mathbf{J} \right).$$

Con la aproximación de primer orden, este producto es

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{J} \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{J} + \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} \mathbf{J} - \mathbf{J} \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \eta} \mathbf{J} \\ &= \mathbf{J}, \end{aligned}$$

poniendo así de manifiesto que la condición simpléctica es válida para toda transformación canónica infinitesimal. De la prolija serie de razonamientos que hemos seguido se deduce, pues, que *toda* transformación canónica, contenga o no el tiempo como parámetro, cumple la condición simpléctica (ec. 9-55 o ec. 9-58).

En su mayor parte, el método simpléctico se ha desarrollado independientemente del método de la función generatriz, salvo en el tratamiento de las transformaciones canónicas infinitesimales. Desde luego, ambos métodos están relacionados. A título de ejemplo, más adelante esbozaremos una prueba de que la condición simpléctica implica la existencia de una función generatriz. Ahora bien, dicha relación tiene muy poca importancia. Ambos métodos son caminos válidos para el tratamiento de las transformaciones canónicas y ambos abarcan todas las propiedades de las transformaciones que necesitamos. Por ejemplo, puede utilizarse indistintamente el formalismo simpléctico o el generador para demostrar que las transformaciones canónicas tienen las cuatro propiedades que caracterizan un grupo (cfr. Ejercicio 13):

1. La transformación identidad es canónica.
2. Si una transformación es canónica, también lo es su inversa.
3. Dos transformaciones canónicas sucesivas (operación «producto») definen una transformación que también es canónica.
4. La operación producto es asociativa.

Por tanto, podemos utilizar libremente el formalismo generador o el simpléctico, como queramos, cosa que dependerá de cuál lleve al tratamiento más sencillo en el caso concreto que tratemos.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

y el conmutador de dos matrices,

$$[A, B] \rightarrow AB - BA,$$

cumplen las mismas condiciones del Álgebra de Lie que el corchete de Poisson. Es esto lo que permite sustituir el corchete de Poisson clásico por el conmutador de los operadores mecanocuánticos. Dicho de otra manera, el «principio de correspondencia» puede funcionar tan sólo porque el corchete de Poisson y el conmutador son representaciones de un «producto» del Álgebra de Lie.*

Existen otros invariantes canónicos además del corchete de Poisson. Uno, en la actualidad de interés principalmente histórico, es el *corchete de Lagrange*. Supongamos que u y v son dos funciones tomadas de un conjunto de $2n$ funciones de las variables canónicas, independientes. Por inversión, podremos considerar que las variables canónicas son funciones del conjunto de $2n$ funciones. Basándonos en esto, definimos el corchete de Lagrange de u y v respecto a las variables (q, p) en la forma

$$\{u, v\}_{q,p} = \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v}, \quad (9-77)$$

o bien, en notación matricial,

$$\{u, v\}_\eta = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial u} \mathbf{J} \frac{\partial \eta}{\partial v}. \quad (9-78)$$

La demostración de la invarianza canónica del corchete de Lagrange es paralela a la del corchete de Poisson. Formamos primero el corchete de Lagrange respecto a las variables ζ :

$$\{u, v\}_\zeta = \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial u} \mathbf{J} \frac{\partial \zeta}{\partial v}. \quad (9-79)$$

* Desde luego, no debemos confundir la aceptabilidad matemática de esta versión del principio de correspondencia con su necesidad física. La introducción de las relaciones de conmutación cuántica fue un gran descubrimiento físico de los pioneros de la Mecánica cuántica. Lo único que mostramos aquí es que existe una semejanza entre la estructura matemática de la formulación del corchete de Poisson de la Mecánica clásica y la versión de relación de conmutación de la Mecánica cuántica. La correspondencia formal es que

$$[u, v] \rightarrow \frac{1}{i\hbar} (uv - vu)$$

donde en el primer miembro u, v son funciones clásicas y en el segundo son operadores cuánticos.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

de donde se deduce la ecuación (9-94) en virtud de (9-68). La ecuación (9-94) podemos considerar que es la ecuación de movimiento generalizada para una función arbitraria u en la formulación de corchetes de Poisson. Contiene como caso particular las ecuaciones de Hamilton cuando en lugar de u sustituimos una de las variables canónicas

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \quad \dot{p}_i = [p_i, H], \quad (9-95a)$$

o, en notación simpléctica,

$$\dot{\eta} = [\eta, H]. \quad (9-95b)$$

Que las ecuaciones (9-95) coinciden con las ecuaciones de movimiento de Hamilton se puede ver directamente observando que por la definición de corchete de Poisson (ec. 9-68) tenemos

$$[\eta, H] = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad (9-96)$$

con lo que la ecuación (9-95b) no es sino otra manera de escribir la ecuación (8-31). De la ecuación (9-94) podemos obtener otra propiedad conocida tomando para u la propia H . En tal caso, la ecuación (9-94) dice que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

como habíamos ya obtenido en la ecuación (8-35). Debemos hacer notar que la ecuación de movimiento generalizada es invariante canónicamente; es válida en cualquier sistema de variables canónicas q, p que se use para expresar la función u o para calcular el corchete de Poisson. No obstante, la hamiltoniana que se utilice debe ser apropiada para el sistema particular de variables canónicas. Al pasar a otro sistema de variables mediante una transformación canónica dependiente del tiempo debemos pasar también a la hamiltoniana transformada K .

Si u es una constante del movimiento, la ecuación (9-94) nos dice que debe tener la propiedad

$$[H, u] = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (9-97)$$

Todas las funciones que cumplan la ecuación (9-97) son constantes del movimiento y recíprocamente, el corchete de Poisson de H con cualquier constante del movimiento debe



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

De la ecuación de movimiento generalizada (ec. 9-106), poniendo G en lugar de u , deducimos finalmente que el cambio de H es

$$\delta H = -\epsilon \frac{dG}{dt}. \quad (9-107)$$

Si G es una constante del movimiento, la ecuación (9-107) nos dice que genera una transformación canónica infinitesimal que no cambia el valor de la hamiltoniana. Es equivalente decir que *las constantes del movimiento son las funciones generatrices de aquellas transformaciones canónicas infinitesimales que dejan invariante la hamiltoniana*. En esta conclusión va implícita una relación entre las propiedades de simetría del sistema y las cantidades que se conservan, relación que se ve facilísimamente en el caso de constantes del movimiento que no dependan explícitamente del tiempo. El cambio de la hamiltoniana ante la transformación no es entonces más que el cambio del valor de la hamiltoniana cuando el sistema pasa de una configuración A a otra configuración B . Si el sistema es simétrico ante la operación que produce este cambio de configuración, es evidente que la hamiltoniana no quedará afectada ante la transformación correspondiente. Así, para dar un ejemplo sencillo, si el sistema es simétrico respecto a una dirección dada, la hamiltoniana no cambiará su valor cuando el sistema gire en conjunto alrededor de dicha dirección. Se deduce, pues, que la cantidad que genera (mediante una T.C.I.) dicha rotación del sistema debe conservarse. La simetría de revolución del sistema implica una constante del movimiento particular. No es este el primer ejemplo de relación entre constantes del movimiento y características de simetría. Ya habíamos encontrado otros (§§ 2-6, 8-2) en relación con la conservación de las cantidades de movimiento generalizadas. Sin embargo, ahora el teorema es más elegante y completo, ya que abarca todas las constantes del movimiento independientes y no solamente las cantidades de movimiento generalizadas.

Los teoremas de conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético aparecen ahora como casos particulares de un enunciado general. Si una coordenada q_i es cíclica, la hamiltoniana es independiente de q_i y será ciertamente invariante ante una transformación infinitesimal que entrañe un desplazamiento de q_i sola. Consideremos ahora una transformación generada por la cantidad de movimiento generalizada conjugada de q_i :

$$G(q, p) = p_i. \quad (9-108)$$

Según las ecuaciones (9-63a y b) la transformación canónica infinitesimal resultante es

$$\begin{aligned} \delta q_j &= \epsilon \delta_{ij}, \\ \delta p_i &= 0, \end{aligned} \quad (9-109)$$

que es, exactamente el desplazamiento infinitesimal requerido de q_i y sólo q_i . Vemos fácilmente que esto es el conocido teorema de la cantidad de movimiento: si una coordenada es cíclica, su cantidad de movimiento conjugada es una constante del movimiento. La observación de que el desplazamiento de una coordenada sola está



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Si tomamos para u una cualquiera de las variables canónicas ζ_i , siendo entonces u_0 el conjunto de variables η_i de partida, la ecuación (9-115) será una fórmula para hallar las ecuaciones de transformación de la transformación canónica finita generada por G .

No es difícil encontrar ejemplos concretos que muestren que este procedimiento funciona. Supongamos que para G tomamos L_z , con lo que la transformación canónica final correspondería a una rotación finita alrededor del eje z . El parámetro natural a utilizar para α es el ángulo de rotación. Para u tomemos la coordenada x de la partícula i -ésima del sistema. Bien sea por evaluación directa de los corchetes de Poisson o por lo que se infiere de las ecuaciones (9-112a), es fácil ver que

$$[X_i, L_z] = -Y_i, \quad [Y_i, L_z] = X_i, \quad (9-118)$$

donde se han utilizado mayúsculas para denotar las coordenadas después de una rotación θ , es decir, las coordenadas finales. Las coordenadas iniciales, o sea, antes de la rotación, las representamos, como de costumbre, por minúsculas. Se deduce entonces que

$$\begin{aligned} [X_i, L_z]_0 &= -Y_i, \\ [[X_i, L_z], L_z]_0 &= -[Y_i, L_z]_0 = -X_i, \\ [[[X_i, L_z], L_z], L_z]_0 &= -[X_i, L_z]_0 = Y_i, \end{aligned}$$

etc. La representación por serie de X_i será, pues,

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - y_i \theta - x_i \frac{\theta^2}{2} + y_i \frac{\theta^3}{3!} + x_i \frac{\theta^4}{4!} - \cdots \\ &= x_i \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots \right) - y_i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots \right). \end{aligned}$$

Vemos que estas dos series son el desarrollo del coseno y del seno, respectivamente. Luego, la ecuación para la transformación finita de X_i será, pues,

$$X_i = x_i \cos \theta - y_i \sin \theta,$$

que es exactamente lo que podría esperarse para la rotación finita de un vector alrededor del eje z en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Para dar otro ejemplo, consideremos el caso en que $G = H$ y el parámetro sea el tiempo. La ecuación (9-116) se reduce entonces a la ecuación de movimiento de u :

$$\frac{du}{dt} = [u, H],$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

En este caso no pueden obtenerse nuevas constantes a partir del teorema de Poisson.

De los corchetes de Poisson fundamentales (ec. 9-69), recordemos que el corchete de Poisson de dos cantidades de movimiento canónicas debe siempre ser cero. Ahora bien, según la ecuación (9-128), L_i no tiene un corchete de Poisson nulo con las otras componentes de \mathbf{L} . Así pues, aun cuando hemos descrito a \mathbf{L} diciendo que es el momento cinético canónico total en virtud de su definición $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ (sumado para todas las partículas), dos componentes de \mathbf{L} no podrán ser simultáneamente variables canónicas. No obstante, la ecuación (9-129) indica que pueden tomarse como variables canónicas al mismo tiempo el módulo de \mathbf{L} y una cualquiera de sus componentes.*

9-7 GRUPOS DE SIMETRÍA DE SISTEMAS MECÁNICOS

Ya hemos señalado que las transformaciones canónicas forman grupo. Las transformaciones canónicas que sean funciones analíticas de parámetros continuos forman grupos separados que pertenecen a la clase conocida con el nombre de grupos de Lie. Así, las transformaciones canónicas correspondientes a rotaciones espaciales del sistema forman un grupo con tres parámetros, p. ej., los ángulos de Euler de rotación. Las rotaciones en torno a un eje particular forman un subgrupo (en realidad el grupo de rotaciones en dos dimensiones) con un solo parámetro. El grupo de transformaciones finitas tiene las mismas propiedades que el grupo de las transformaciones canónicas infinitesimales asociadas y se acostumbra a trabajar principalmente con las T.C.I. por ser de más fácil manejo. Los grupos de Lie de transformaciones canónicas infinitesimales cuyos generadores sean las constantes del movimiento del sistema se denominan *grupos de simetría* del sistema ya que, según hemos visto, dichas transformaciones dejan invariante la hamiltoniana. Hallar los grupos de simetría de un sistema constituye un largo camino para resolver el problema de su movimiento clásico y está más próximo a la solución del problema mecanocuántico.

Un sistema con simetría de esfericidad es invariante ante la rotación en torno a un eje cualquiera. Podríamos, pues, esperar que uno de sus grupos de simetría fuese el grupo de rotaciones en tres dimensiones $R(3) \equiv SO(3)$. En un tal sistema se conserva el vector \mathbf{L} de

* Hemos señalado anteriormente que la correspondencia entre las Mecánicas cuántica y clásica es tal que el conmutador mecanocuántico pasa esencialmente a ser corchete de Poisson cuando $\hbar \rightarrow 0$. Gran parte de la estructura formal de la Mecánica cuántica es una transcripción estrecha de la formulación del corchete de Poisson de la Mecánica clásica. Por tanto, todos los resultados obtenidos en este apartado tienen analogías cuánticas. Por ejemplo, el hecho de que dos componentes de \mathbf{L} no puedan ser simultáneamente cantidades de movimiento canónicas se corresponde con el hecho conocido de que L_i y L_j no pueden tener valores propios simultáneos. Pero L^2 y cualquier L_i pueden estar cuantizados juntos. Verdaderamente, la mayoría de estas relaciones se conocen mucho más en su forma cuántica que en la de teoremas clásicos. Así, una de las primeras referencias a los corchetes de Poisson clásicos para el momento cinético parece ser el tratado publicado en 1930 de Born y Jordan, *Elementare Quantenmechanik*. También, aun cuando el cambio general de una función vectorial ante una rotación (ec. 9-123) se conoce desde hace mucho en Mecánica cuántica (cfr. Condon y Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, p. 59), hasta hace muy poco la única referencia a su versión clásica figuraba en la famosa tesis de H. B. G. Casimir, *Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics*, 1931, p. 30.

† Este apartado se puede omitir en una primera lectura.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Son estas relaciones iguales a las del vector momento cinético tridimensional, o de los generadores de rotación en un espacio tridimensional. El grupo de transformaciones generado por S_i puede, por tanto, identificarse con $R(3)$ o $SO(3)$. En realidad, en la identificación hay cierta ambigüedad. Hemos visto anteriormente (cfr. p. 193) que existe un homomorfismo entre $R(3)$ y el grupo unimodular unitario $SU(2)$. Resulta* que en este caso es más apropiado $SU(2)$. Para vislumbrar las circunstancias que justifican esta elección podemos notar que la ecuación (9-147) sugiere que hay un espacio tridimensional cada uno de cuyos puntos corresponde a un conjunto particular de parámetros orbitales. Para una energía del sistema dada, la ecuación (9-147) dice que, en este espacio, los «puntos» de la órbita se encuentran sobre una esfera. Las constantes S_i generan en esta esfera rotaciones tridimensionales, es decir, cambian una órbita en otra órbita que tiene igual energía. Puede demostrarse que S_i genera una transformación que cambia la excentricidad de la órbita y que para toda excentricidad final dada se pueden encontrar *dos* transformaciones que lleven a ella. Esta cualidad bivalente de la transformación es la que indica que es $SU(2)$ y no $R(3)$ el grupo de simetría correcto para el oscilador armónico bidimensional. En caso de mayor número de dimensiones, las constantes de estructura de los grupos de rotación y los grupos $SU(n)$ ya no son idénticas y puede establecerse una neta separación entre ambos. En el caso del oscilador armónico isótropo tridimensional hay de nuevo una constante del movimiento tensorial definida por la ecuación (9-141) con la diferencia de que ahora los índices toman los valores 1, 2 y 3. Las componentes distintas de este tensor, junto con las componentes de L satisfacen ahora las relaciones de corchete de Poisson con constantes de estructura un tanto complicadas que pertenecen a $SU(3)$. Se puede demostrar† que para el oscilador armónico isótropo n -dimensional el grupo de simetría es $SU(n)$.

Hemos señalado (cfr. p. 131) que existe una relación entre la existencia de constantes del movimiento algebraicas adicionales —y por tanto de grupos de simetría superiores— y la degeneración de los movimientos del sistema. En el caso de Kepler y del oscilador armónico isótropo las constantes del movimiento adicionales están relacionadas con parámetros de la órbita. A menos que la órbita sea cerrada, es decir, que el movimiento esté confinado a una sola curva, será difícil hablar de tales parámetros. Solamente cuando las diversas componentes del movimiento tengan periodos conmensurados, es decir, sean degeneradas, será cerrada la órbita. El ejemplo clásico lo tenemos en el oscilador anisótropo bidimensional. Cuando las frecuencias en las direcciones x e y sean una múltiplo entero de la otra, la partícula recorrerá una curva de Lissajous cerrada. Pero si las frecuencias no son conmensurables entre sí, el movimiento de la partícula llena todo el espacio o sea es ergódico, llegando a aproximarse cuanto queramos a cualquier punto concreto contenido en el rectángulo definido por las energías de movimiento en las dos direcciones. La naturaleza exacta de esta relación entre propiedades de simetría y degeneración sigue siendo tema de estudio. Los intentos de encontrar grupos de simetría complicados (tal vez complejos) para sistemas no degenerados, aplicables a todos los problemas de un mismo número de grados de libertad, no han resultado fructíferos todavía. En el próximo capítulo tendremos ocasión de considerar más a fondo la relación entre simetría y degeneración.

* Véase H. V. McIntosh, *Am. Jour. Phys.* 27, 620 (1959) para un estudio más completo.

† Esto lo demostró para el caso mecanocuántico G. A. Baker, Jr., *Phys. Rev.* 103, 1119 (1956), mediante razonamientos que también se pueden expresar en el lenguaje de la Mecánica clásica.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

considerables semejanzas con el que se ha adoptado aquí. El método simpléctico se da en forma matricial, si bien la notación es totalmente diferente. Se da un método para pasar del procedimiento simpléctico al de la función generatriz, pero el camino a seguir no queda claro o no siempre resulta convincente.

C. W. KILMISTER, *Hamiltonian Dynamics*. Para los poseedores de una base matemática moderna de Análisis tensorial y Geometría diferencial, este librito presenta un estudio elegante y compacto con fuerte énfasis en el método simpléctico. El autor presenta un «generador universal» en η y ζ de donde se pueden deducir los cuatro tipos.

E. J. SALETAN y A. H. CROMER, *Theoretical Mechanics*. Se dedica mucho espacio a las transformaciones canónicas principalmente desde el punto de vista simpléctico, pero incluyendo la transición al método de la función generatriz. El término canónica se utiliza en el sentido que damos aquí a la transformación canónica extensa. Se añade además la poco ortodoxa, si no definitivamente peligrosa, noción de transformación *canonoide* —que sólo es canónica para determinados tipos de hamiltoniana. (La mayor parte de aplicaciones de las transformaciones canónicas dependen de la propiedad de ser canónicas para *todas* las hamiltonianas.) Se estudian explícitamente las transformaciones canónicas que dependen de un parámetro continuo.

E. C. G. SUDARSHAN y N. MUKUNDA, *Classical Dynamics*. Es un tratado de Mecánica impregnado de un método de teoría de grupos. Se podría denominar Mecánica clásica por un físico especializado en teoría de partículas. Gran parte del libro se ocupa verdaderamente de transformaciones canónicas y de las implicaciones de las simetrías del sistema y las transformaciones.

H. V. MCINTOSH, *Symmetry and Degeneracy*, en *Group Theory and its Applications*, vol. II, E. M. Loebl, ed. Se hace referencia de nuevo a esta entusiástica revisión de las relaciones entre simetrías del sistema y constantes del movimiento. Aun cuando raramente se mencionan las transformaciones canónicas *per se*, aparece frecuentemente la noción de que los generadores de operaciones de simetría proporcionan las constantes del movimiento y se presentan muchos ejemplos.

EJERCICIOS

1. Uno de los intentos de combinar los dos sistemas de ecuaciones de Hamilton en uno consiste en tomar q y p como partes real e imaginaria de un número complejo. Demostrar directamente a partir de las ecuaciones de movimiento de Hamilton que, en el caso de un sistema de un grado de libertad, la transformación

$$Q = q + ip, \quad P = Q^*$$

no es canónica si se deja inalterada la hamiltoniana. ¿Podemos encontrar otro sistema de coordenadas Q', P' que estén relacionadas con Q, P mediante un cambio de escala tan sólo y sean canónicas?

2. a) En el caso de un sistema unidimensional con la hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2},$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

libertad y obtener una función generatriz adecuada. Aplicar la transformación a la solución del oscilador armónico lineal.

16. Probar que la transformación

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1^2, & Q_2 &= q_2 \sec p_2, \\ P_1 &= \frac{p_1 \cos p_2 - 2q_2}{2q_1 \cos p_2}, & P_2 &= \operatorname{sen} p_2 - 2q_1 \end{aligned}$$

es canónica, mediante un método cualquiera. Hallar una función generatriz adecuada que conduzca a dicha transformación.

17. a) Demostrar que la transformación

$$Q = p + iaq, \quad P = \frac{p - iaq}{2ia}$$

es canónica y hallar una función generatriz.

b) Utilizar la transformación para resolver el problema del oscilador armónico lineal.

18. a) La hamiltoniana de un sistema tiene la forma

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4 \right).$$

Hallar la ecuación de movimiento para q .

b) Hallar una transformación canónica que reduzca H a la forma de un oscilador armónico. Demostrar que, para las variables transformadas, la solución es tal que se cumple la ecuación de movimiento hallada en el apartado (a).

19. Un sistema de n partículas se mueve en un plano bajo la influencia de fuerzas de interacción que derivan de términos potenciales que sólo dependen de las separaciones escalares de las partículas.

- Utilizando coordenadas polares planas para cada partícula (relativas a un origen común), identificar la forma de la hamiltoniana para el sistema.
- Hallar una función generatriz para la transformación canónica que corresponda a una transformación a coordenadas que giren en el plano en sentido antihorario con velocidad angular ω uniforme (la misma para todas las partículas). ¿Cuáles serán las ecuaciones de transformación para las cantidades de movimiento?
- ¿Cuál es la nueva hamiltoniana? ¿Qué significado físico podemos dar a la diferencia entre la hamiltoniana antigua y la nueva?

20. a) En el problema de pequeñas oscilaciones en torno a un movimiento estacionario, demostrar que en el punto de movimiento estacionario todas las variables η de la hamiltoniana son constantes. Si los valores para movimiento estacionario son η_0 con lo que $\eta = \eta_0 + \zeta$, demostrar que a la



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

coordenadas antiguas y del tiempo; no parece decirnos cómo están contenidas en S las nuevas cantidades de movimiento. Éstas no se han especificado todavía y sólo sabemos que han de ser constantes. No obstante, la naturaleza de la solución indica cómo hay que seleccionar las nuevas P_i .

Matemáticamente, la ecuación (10-3) tiene la forma de ecuación en derivadas parciales de primer orden con $n + 1$ variables. Supongamos que exista una solución de la ecuación (10-3) de la forma

$$F_2 \equiv S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}; t), \quad (10-4)$$

donde las cantidades $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ son $n + 1$ constantes de integración *independientes*. A dichas soluciones las llamamos *soluciones completas* de la ecuación en derivadas parciales de primer orden.* Sin embargo, una de las constantes de integración resulta irrelevante, en realidad, para la solución, ya que podemos observar que la propia S no aparece en la ecuación (10-3); tan sólo intervienen sus derivadas parciales respecto a q o t . Por tanto, si S es una solución de la ecuación en derivadas parciales, también lo será $S + \alpha$, donde α es una constante cualquiera. Una de las $n + 1$ constantes de integración de la ecuación (10-4) deberá aparecer sólo en forma de constante aditiva pegada a S . Pero, a mayor abundamiento, una constante aditiva no tiene importancia alguna en una función generatriz, ya que en las ecuaciones de transformación sólo figuran derivadas parciales de la función generatriz. Luego, para nuestros fines, una solución completa de la ecuación (10-3) podrá escribirse en la forma

$$S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t), \quad (10-5)$$

donde ninguna de las n constantes independientes es únicamente aditiva. En este atiendo matemático, S concuerda exactamente con la forma buscada para una función generatriz de tipo F_2 , ya que la ecuación (10-5) presenta a S como función de n coordenadas, del tiempo t y de n cantidades independientes α_i . Podemos, pues, con toda libertad, tomar para las n constantes de integración las cantidades de movimiento nuevas (que son constantes):

$$P_i = \alpha_i. \quad (10-6)$$

Esta elección no contradice la afirmación original de que las nuevas cantidades de movimiento están relacionadas con los valores iniciales de q y p en el instante t_0 . Las n

* La ecuación (10-4) no es el único tipo de solución posible para la ecuación (10-3). La forma más general de solución contiene una o más funciones arbitrarias en vez de constantes arbitrarias. Véase, p. ej., R. Courant y D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, 1962, pp. 24-28 y V. I. Smirnov: *A Course of Higher Mathematics*, Vol. IV, 1964, §III. Ni siquiera hay necesariamente una solución única de la forma (10-4). Pueden haber varias soluciones completas para la ecuación dada. Pero lo único que importa para el razonamiento subsiguiente es que exista una solución completa.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

La ecuación (10-20) puede «volverse del revés» de manera inmediata para dar q en función de t y de las dos constantes de integración α y β :

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \text{sen } \omega(t + \beta), \quad (10-21)$$

que es la conocida solución del oscilador armónico. Desde un punto de vista formal, la obtención de la cantidad de movimiento se debe a la ecuación de transformación (10-7) la cual, utilizando la ecuación (10-18), puede escribirse en la forma

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m\omega^2 q^2}.$$

Teniendo en cuenta la ecuación (10-21), resulta

$$p = \sqrt{2m\alpha(1 - \text{sen}^2 \omega(t + \beta))},$$

o sea

$$p = \sqrt{2m\alpha} \cos \omega(t + \beta). \quad (10-22)$$

Desde luego, este resultado comprueba la sencilla identificación de p con $m\dot{q}$.

Para completar la historia, debemos relacionar las constantes α y β con las condiciones iniciales q_0 y p_0 en el instante $t = 0$. Elevando al cuadrado las ecuaciones (10-21) y (10-22) vemos que α viene dada en función de q_0 y p_0 a través de la ecuación

$$2m\alpha = p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2. \quad (10-23)$$

El mismo resultado se tiene inmediatamente, desde luego, al identificar α con la energía total E que se conserva, tal como hicimos anteriormente. Por último, la constante de fase β está relacionada con q_0 y p_0 por la expresión

$$\text{tg } \omega\beta = m\omega \frac{q_0}{p_0}. \quad (10-24)$$

Así pues, la función principal de Hamilton es el generador de una transformación canónica a una nueva coordenada que mide el ángulo de fase de la oscilación y a una



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

El primer término de la ecuación (10-33) es independiente de t y sólo puede depender de las q_i , mientras que el segundo término puede ser función, como máximo, de t . Luego la ecuación sólo puede valer si ambos términos son constantes y sus valores son opuestos (de igual valor absoluto):

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = -\alpha_1, \quad (10-34a)$$

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_1. \quad (10-34b)$$

La primera ecuación se satisface con $S_0 = -\alpha_1 t$, como en las ecuaciones (10-17) y (10-25), mientras la segunda es la ecuación de Hamilton-Jacobi para W . El valor constante de la hamiltoniana, α_1 , aparece pues en este método bajo el aspecto de constante de separación.

Es posible encontrar ejemplos en los cuales la ecuación de Hamilton-Jacobi pueda resolverse sin separar la variable tiempo (p. ej., Ejercicio 8). A pesar de todo, casi todas las aplicaciones útiles del método de Hamilton-Jacobi comportan hamiltonianas que no dependen explícitamente del tiempo para las cuales, por tanto, t es variable separable. El estudio subsiguiente de la separabilidad se limitará, pues, a sistemas en los cuales H sea una constante del movimiento y se utilizará exclusivamente la función característica de Hamilton W .

Podemos demostrar fácilmente que toda coordenada cíclica o ignorable es separable. Supongamos que la coordenada cíclica sea q_1 ; la cantidad de movimiento conjugada p_1 es una constante, llamémosla γ . La ecuación de Hamilton-Jacobi para W será

$$H\left(q_2, \dots, q_n; \gamma; \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1. \quad (10-35)$$

Si ensayamos una solución separada de la forma

$$W = W_1(q_1, \alpha) + W'(q_2, \dots, q_n; \alpha), \quad (10-36)$$

resulta evidente que la ecuación (10-35) sólo contiene la función separada W' , mientras que W_1 es la solución de la ecuación

$$P_1 = \gamma = \frac{\partial W_1}{\partial q_1}. \quad (10-37)$$

La constante γ es, pues, la constante de separación y la solución evidente para W_1 (salvo una constante aditiva trivial) es

$$W_1 = \gamma q_1,$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

satisfaciendo las W_i ecuaciones de la forma

$$\left[\frac{\partial W_i}{\partial q_i} - a_i \right]^2 = -2V_i(q_i) + 2\phi_{ij}\gamma_j, \quad (10-48)$$

donde γ_j son constantes de integración (y sólo hay suma extendida al índice j).

Aun cuando estas condiciones parezcan misteriosas y complicadas, su aplicación suele ser bastante inmediata. Como ejemplo de algunas de las ideas que hemos desarrollado acerca de la separabilidad, estudiaremos en coordenadas polares la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula en movimiento bajo la acción de una fuerza central. Después generalizaremos el problema para leyes de potencial arbitrarias, a fin de proporcionar una aplicación de las condiciones de Staeckel.

Consideremos primeramente el problema de la fuerza central en función de las coordenadas polares (r, ψ) en el plano de la órbita. El movimiento tiene entonces sólo dos grados de libertad y la hamiltoniana adopta la forma

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2} \right) + V(r), \quad (10-49)$$

y es cíclica en ψ . En consecuencia, la función característica de Hamilton aparece en la forma

$$W = W_1(r) + \alpha_\psi \psi, \quad (10-50)$$

donde α_ψ es el momento cinético constante p_ψ conjugado de ψ . La ecuación de Hamilton-Jacobi se convierte entonces en

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\psi^2}{r^2} + 2mV(r) = 2m\alpha_1,$$

donde α_1 es la constante que se identifica físicamente con la energía total del sistema. Despejando de (10-51) la derivada parcial de W_1 obtenemos

$$\frac{\partial W_1}{\partial r} = \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}}, \quad (10-51)$$

con lo que W es

$$W = \int dr \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}} + \alpha_\psi \psi. \quad (10-52)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

con lo que w es función lineal del tiempo, exactamente como en la ecuación (10-29).

Hasta ahora, las variables acción-ángulo sólo aparecen como un sistema particular de la clase general de coordenadas transformadas al cual lleva la ecuación de Hamilton-Jacobi. De la ecuación (10-68) podríamos despejar q en función de w y J , lo cual, en combinación con la ecuación (10-70), nos daría la solución buscada para q en función del tiempo. Pero cuando se utilizan de esta manera, las variables no presentan ninguna ventaja sobre cualquier otro sistema de coordenadas generado por W . Su mérito particular se debe más bien a la interpretación física que se puede dar a v . Consideremos el cambio de w cuando q describe un ciclo completo de libración o rotación, dado por

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq. \quad (10-71)$$

Según la ecuación (10-68), esto se puede también escribir en la forma

$$\Delta w = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J} dq. \quad (10-72)$$

Como J es una constante, podemos sacar del signo integral la derivada respecto a J :

$$\Delta w = \frac{d}{dJ} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{d}{dJ} \oint p dq = 1, \quad (10-73)$$

donde hemos utilizado la definición de J dada por la ecuación (10-65).

La ecuación (10-73) nos dice que w cambia en una unidad cuando q varía a lo largo de un periodo completo. Pero de la ecuación (10-70) se deduce que si es τ el periodo para un ciclo completo de q , será

$$\Delta w = 1 = v\tau.$$

Luego, la constante v podemos identificarla con el recíproco del periodo,

$$v = \frac{1}{\tau} \quad (10-74)$$

y será, por tanto, la *frecuencia asociada al movimiento periódico de q* . Así pues, la utilización de las variables acción-ángulo nos proporciona una técnica potente para la obtención de la frecuencia de un movimiento periódico *sin hallar una solución completa del movimiento del sistema*. Si sabemos de antemano que un sistema de un grado de



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

libración o rotación. Al efectuar este método puramente matemático está claro que *no* seguimos el movimiento del sistema en el tiempo. Es como si suspendiéramos el transcurso del tiempo y se moviera cada una de las q , como si lo hiciéramos manualmente, independientemente a lo largo de unos cuantos ciclos de su movimiento. En realidad, **estamos tratando con los desplazamientos virtuales del capítulo 1 y en consecuencia, representaremos por δw_i la variación infinitesimal de w_i cuando se varían infinitesimalmente las q_j , la cual viene dada por**

$$\delta w_i = \sum_j \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \sum \frac{\partial^2 W}{\partial J_i \partial q_j} dq_j,$$

en donde hemos utilizado la ecuación (10-86). La derivada respecto a q_i se anula salvo para la W_j constituyente de W , con lo que por la ecuación (10-80) δw_i se reduce a

$$\delta w_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \sum_j p_j(q_j, J) dq_j. \quad (10-89)$$

La ecuación (10-89) nos da δw_i en forma de suma de contribuciones independientes, cada una de las cuales contiene solamente el movimiento de q_j . El cambio total de w_i a consecuencia de la maniobra especificada será, pues,

$$\Delta w_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{m_j} p_j(q_j, J) dq_j.$$

El operador derivada parcial respecto a J_i se puede sacar de los signos integral porque a lo largo del movimiento cíclico de q_j todas las J se mantienen constantes. Bajo cada signo integral el símbolo m_j indica que la integración se extiende a m_j ciclos de q_j . Pero, por la definición de las variables de acción, cada una de las integrales es exactamente $m_j J_j$. Como las J son independientes, se deduce que

$$\Delta w_i = m_i. \quad (10-90)$$

Es más, notemos que si alguna q_j no efectuara un número completo de ciclos, en la integración sobre q_j quedaría un resto de integral sobre una fracción de ciclo y Δw_i no tendría un valor entero. Si los conjuntos de las w y de las m se trataran como vectores \mathbf{w} y \mathbf{m} , respectivamente, la ecuación (10-90) podría escribirse en la forma

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{m}. \quad (10-90')$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Siempre que exista degeneración, las frecuencias fundamentales ya no son independientes y el movimiento periódico del sistema se puede describir con menos que el complemento total de n frecuencias. Las m condiciones de degeneración pueden utilizarse para reducir el número de frecuencias a $n - m$ y diremos que el movimiento del sistema es $n - m$ veces periódico. La reducción de las frecuencias se puede realizar de manera elegante por medio de una transformación puntual de las variables acción-ángulo. Las m condiciones de degeneración se pueden escribir de manera resumida en la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^n j_{ki} v_i = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (10-101)$$

Consideremos ahora una transformación puntual que lleve de (w, J) a (w', J') definida por la función generatriz (cfr. ec. 9-26 donde se aplica el convenio de suma):

$$F_2 = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n J'_k j_{ki} w_i + \sum_{k=m+1}^n J'_k w_k. \quad (10-102)$$

Las coordenadas transformadas son

$$\begin{aligned} w'_k &= \sum_{i=1}^n j_{ki} w_i, & k &= 1, \dots, m, \\ w'_k &= w_k, & k &= m+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10-103)$$

Correspondientemente, las nuevas frecuencias son

$$\begin{aligned} v'_k &= \dot{w}'_k = \sum_{i=1}^n j_{ki} v_i = 0 & k &= 1, \dots, m, \\ &= v_k & k &= m+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (10-104)$$

Así, en las coordenadas transformadas son nulas m de las frecuencias y nos queda un sistema de $n - m$ frecuencias independientes. Es evidente que las nuevas w'_k pueden también denominarse variables ángulo en el sentido de que la configuración del sistema tiene periodicidad múltiple en las coordenadas w'_k con periodo fundamental unidad. Las correspondientes variables de acción constantes vienen dadas por la solución de las n ecuaciones de transformación

$$J_i = \sum_{k=1}^m J'_k j_{ki} + \sum_{k=m+1}^n J'_k \delta_{ki}. \quad (10-105)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

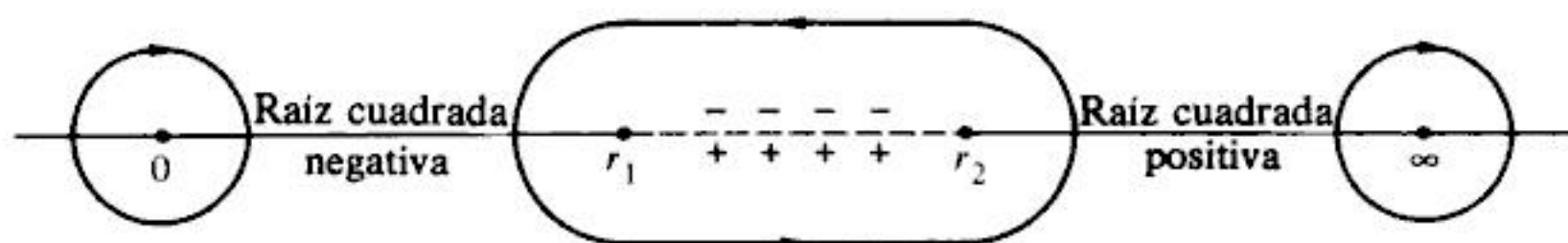


FIGURA 10-3

El plano complejo r en la proximidad del eje real; se indican los caminos de integración utilizados en el cálculo de J .

siendo ahora el sentido de recorrido para la integración el inverso (el horario).^{*} En esta región, el integrando es función uniforme y no hay ningún inconveniente para la aplicación del método de los residuos. Sólo hay dos puntos singulares, a saber, el origen y el infinito y podemos deformar el camino de integración según dos circunferencias descritas en sentido horario y que encierran a estos dos puntos. Ahora bien, el signo ante la raíz cuadrada del integrando debe ser el negativo para la región a lo largo del eje real por debajo de r_1 , según podemos ver examinando el comportamiento de la función en la proximidad de r . Si representamos el integrando en la forma

$$-\sqrt{A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2}},$$

el residuo en el origen es

$$R_0 = -\sqrt{-C}.$$

Por encima de r_2 , el signo de la raíz cuadrada en el eje real resulta ser positivo y se obtiene el residuo mediante la técnica normal de cambiar la variable de integración en la forma $z = r^{-1}$:

$$-\oint \frac{1}{z^2} \sqrt{A + 2Bz - Cz^2} dz. \quad (10-114)$$

El desarrollo en torno a $z = 0$ nos da el residuo

$$R_x = -\frac{B}{\sqrt{A}}.$$

^{*} Para visualizar este cambio de punto de vista conviene considerar el plano complejo proyectado estereográficamente sobre una superficie esférica que tenga el origen en su polo sur y el punto del infinito en el polo norte. El eje real se convierte en un círculo meridiano que une los dos polos. Todo camino de integración sobre la esfera divide a su superficie en dos zonas. Podremos considerar que el camino encierra a una u otra, según cuál sea el sentido de integración.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

función del ángulo polar en el plano orbital. Eligiendo adecuadamente el límite inferior de integración, que es arbitrario, puede encontrarse que $2\pi w_2$ es la diferencia entre dos ángulos en el plano de la órbita, uno de los cuales es el ángulo que forma el radio vector con la línea de nodos y el otro es el ángulo que forma aquél con la línea de periápsides. dicho de otro modo, $2\pi w_2$ es el argumento del perihelio:

$$2\pi w_2 = \varpi. \quad (10-140)$$

La deducción detallada se deja para uno de los ejercicios.

El método de las variables acción-ángulo no nos parece la manera más rápida para resolver el problema de Kepler y la utilidad práctica del sistema de variables no es evidente. No obstante, su mérito ha quedado bien patente en la Mecánica celeste, donde aparecen en forma de *variables de Delaunay*.* En el próximo capítulo veremos que proporcionan los elementos naturales de la órbita que se utilizarán en la teoría de perturbaciones, por ejemplo, cuando buscamos las modificaciones de las órbitas normales de Kepler debidas a pequeñas desviaciones de la fuerza respecto a la ley de proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia. Muchos estudios básicos de perturbaciones posibles de órbitas de satélites se han efectuado utilizando las variables acción-ángulo.

Durante un tiempo corto, las variables acción-ángulo desempeñaron, particularmente en el problema de Kepler, un papel destacado en las mismísimas fronteras de la investigación física. Poco después del advenimiento de la teoría cuántica del átomo de Bohr en 1913, se vio que las condiciones cuánticas se podían enunciar de la manera más fácil mediante las variables de acción. Durante una década, iniciada hacia 1915, hubo un interés desusado en las propiedades de las variables acción-ángulo y gran parte de la «teoría cuántica antigua» se construyó en torno a ellas. En Mecánica clásica las variables de acción poseen un dominio continuo de valores, pero no sucede así en Mecánica cuántica. Las condiciones cuánticas de Sommerfeld y Wilson exigían que el movimiento se limitara a órbitas para las cuales las variables de acción «propias» tuvieran valores discretos que fuesen múltiplos enteros del quantum de acción h . (Variables de acción propias son aquellas J cuyas frecuencias sean no degeneradas y diferentes de cero. Por ejemplo, J_3 es una variable de acción propia.) Según dijo Sommerfeld, el método de las variables acción-ángulo proporcionaba entonces «un camino real para la cuantización». Solamente había que resolver el problema en Mecánica clásica utilizando variables acción-ángulo y se podía cuantizar el movimiento de manera inmediata sustituyendo las J por múltiplos enteros de la constante de Planck h .

Como ejemplo de este procedimiento podemos observar que los niveles energéticos cuantizados de un átomo hidrogenoide se obtienen inmediatamente de la ecuación (10-123) si se hace k igual a Ze^2 y se sustituye J_3 por nh :

$$E = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}. \quad (10-141)$$

* Según la definición habitual, las variables de Delaunay se diferencian del sistema (J_i, w_i) por constantes multiplicativas.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

EJERCICIOS

1. Demostrar que, para un sistema conservativo, resolviendo una ecuación en derivadas parciales adecuada se puede construir una transformación canónica tal que la nueva hamiltoniana sea función de las nuevas *coordenadas* solamente. (No emplear la transformación de intercambio.) Mostrar cómo viene dada en función de las nuevas coordenadas y cantidades de movimiento una solución formal para el movimiento del sistema.

2. En el texto hemos obtenido la ecuación de Hamilton-Jacobi para S buscando una transformación de contacto que lleve de las coordenadas canónicas (q, p) a las constantes (α, β) . Inversamente, si es $S(q_i, \alpha_i, t)$ una solución completa cualquiera de la ecuación de Hamilton-Jacobi (10-3), demostrar que el sistema de variables (q_i, p_i) definido por las ecuaciones (10-7) y (10-8) son variables canónicas, es decir, que satisfacen a las ecuaciones de Hamilton.

3. Resolver el problema de movimiento de un proyectil puntiforme en un plano vertical, utilizando el método de Hamilton-Jacobi. Hallar la ecuación de la trayectoria y la dependencia del tiempo de las coordenadas, suponiendo que el proyectil se ha disparado en el instante $t = 0$ desde el origen con una velocidad v_0 que forma un ángulo α con la horizontal.

4. Plantear el problema de la peonza simétrica pesada, con un punto fijo, en el método de Hamilton-Jacobi y obtener la solución formal del movimiento dada por la ecuación (5-63).

5. Demostrar que la función

$$S = \frac{m\omega}{2}(q^2 + x^2) \cot \omega t - m\omega qx \csc \omega t$$

es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función principal de Hamilton correspondiente al oscilador armónico lineal siendo

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2).$$

Demostrar que esta función genera una solución correcta para el movimiento del oscilador armónico en el tiempo.

6. Una partícula cargada está obligada a moverse en un plano bajo la influencia de una fuerza central (no electromagnética) que deriva de un potencial $V = \frac{1}{2}kr^2$ y un campo magnético constante \mathbf{B} perpendicular al plano, de manera que

$$(\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}).$$

Establecer la ecuación de Hamilton-Jacobi para la función característica de Hamilton en coordenadas polares planas. Separar dicha ecuación y reducirla a cuadraturas. Estudiar el movimiento si la cantidad de movimiento canónica p_θ es nula en el instante $t = 0$.

7. a) Una partícula se mueve por el espacio bajo la acción de un potencial conservativo. Establecer la ecuación de Hamilton-Jacobi en coordenadas elipsoidales u, v, ϕ definidas en función de las



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

haber llenado el espacio —alegremente hablando, que habrá pasado por todo punto de un rectángulo definido por las amplitudes de los movimientos según x y según y . Hemos visto que el achatamiento del campo gravitatorio terrestre origina pequeñas perturbaciones las cuales dan lugar a cambios cuantitativos apreciables en el movimiento de un satélite puntual. En el campo central sin perturbar, el movimiento del satélite está confinado en un plano; toda perturbación cuadrupolar gravitatoria, por pequeña que sea, hace que el movimiento se salga del plano inicial (mientras el eje del cuadrupolo no sea perpendicular al plano).

El desarrollo de la teoría de la perturbación se remonta a los primeros tiempos de la Mecánica celeste. Por ejemplo, Newton se dio cuenta de que la mayoría de las oscilaciones en el movimiento de la Luna se debían a pequeñas variaciones de la atracción solar en el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. Sus intentos iniciales de una teoría lunar que incluyera dichos efectos correspondía aproximadamente a una forma de teoría de la perturbación. Muchos de los desarrollos subsiguientes de la estructura formal de la Mecánica clásica, tales como la teoría canónica de Hamilton, se apoyaban en gran medida en la apetencia de técnicas de perturbación perfectas en Mecánica celeste. La necesidad de predecir órbitas muy precisas para vehículos espaciales y el enorme incremento de la capacidad de cálculos numéricos han impulsado recientemente aún más la teoría de la perturbación. (No obstante, la mayoría de estos desarrollos recientes se salen del ámbito de nuestro estudio.)

La teoría clásica de la perturbación podemos dividirla en dos aspectos: perturbación dependiente del tiempo y perturbación independiente del tiempo. La terminología se ha escogido con la vista puesta en la teoría de la perturbación desarrollada para la Mecánica cuántica y en verdad existen muchos puntos de analogía entre las técnicas de perturbación clásicas y sus contrapartidas cuánticas. Hablando de manera general, la teoría clásica de la perturbación es mucho más complicada que la versión correspondiente a la Mecánica cuántica. Trataremos primeramente la perturbación dependiente del tiempo que es la forma más fácil de entender. Aun cuando la teoría de la perturbación se puede desarrollar para todas las versiones de Mecánica clásica, lo más fácil es utilizar la formulación de Hamilton-Jacobi.

11-2 PERTURBACIÓN DEPENDIENTE DEL TIEMPO (VARIACIÓN DE CONSTANTES)

Sea $H_0(q, p, t)$ la hamiltoniana correspondiente al problema resoluble, no perturbado. Imaginemos que se ha obtenido la solución mediante la función principal de Hamilton $S(q, \alpha, t)$, la cual genera una transformación canónica en la cual la nueva hamiltoniana, K_0 , para el problema no perturbado es idénticamente nula. Las variables canónicas transformadas (α, β) son entonces todas constantes en el caso no perturbado. Consideremos ahora el problema perturbado para el cual escribiremos la hamiltoniana en la forma

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + \Delta H(q, p, t). \quad (11-1)$$

Hemos recalcado anteriormente que la propiedad canónica de una transformación de



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Podemos obtener una solución rigurosa de las ecuaciones (11-13) derivando respecto al tiempo la ecuación (11-13a):

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - m\omega^2 \left(\dot{\beta} + \frac{\dot{x}t}{m} \right) = -\omega^2 x. \quad (11-15)$$

Así pues, en el sistema perturbado x tiene una variación armónica simple con el tiempo. De las ecuaciones (11-13a) y (11-9) se deduce que $x = -\dot{x}/(m\omega^2)$ y por tanto, la solución para x es también un movimiento armónico simple. En consecuencia, considerando que son ecuaciones de movimiento rigurosas, las ecuaciones (11-13) conducen adecuadamente a la solución correcta conocida.

Pero consideremos ahora que $m\omega^2 (\equiv k, \text{ constante de rigidez})$ sea un parámetro pequeño y busquemos soluciones de perturbación. La perturbación de primer orden se obtiene sustituyendo en el segundo miembro α y β por sus valores no perturbados α_0 y β_0 . Por razón de sencillez tomaremos $x = 0$ inicialmente, con lo que $\beta_0 = 0$; el valor inicial de p es entonces α_0 . Las ecuaciones de movimiento de primer orden son entonces

$$\dot{\alpha}_1 = -\omega^2 \alpha_0 t, \quad \dot{\beta}_1 = \alpha_0 \frac{\omega^2 t^2}{m}, \quad (11-16)$$

con soluciones inmediatas

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{\omega^2 \alpha_0 t^2}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_0 \omega^2 t^3}{3m}. \quad (11-17)$$

Las soluciones para x y p de primer orden son entonces

$$x = \frac{\alpha_1 t}{m} + \beta_1 = \frac{\alpha_0}{m\omega} \left[\omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} \right], \quad (11-18a)$$

y

$$p = \alpha_1 = \alpha_0 \left[1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} \right]. \quad (11-18b)$$

Sustituyendo en los segundos miembro de las ecuaciones (11-13) α y β por sus expresiones (11-17), las ecuaciones de movimiento de segundo orden quedan en la forma

$$\dot{x}_2 = -\alpha_0 \omega^2 \left(t - \frac{\omega^2 t^3}{6} \right), \quad \dot{\beta}_2 = \frac{\alpha_0 \omega^2}{m} \left(t^2 - \frac{\omega^2 t}{b} \right), \quad (11-19)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

problema de Kepler* de la forma dada en la ecuación (11-41), con $n = 3$ y

$$h = \frac{kl^2}{m^2 c^2}, \quad (11-48)$$

con lo cual la ecuación (11-47) se convierte en

$$\overline{\dot{\omega}} = \frac{6\pi k^2}{\tau l^2 c^2}. \quad (11-49)$$

Para aplicar la ecuación (11-49) a la velocidad de precesión secular de la precesión de un cuerpo que gira alrededor del Sol, k se hace igual a GMm y la ecuación (3-63), válida para la elipse no perturbada, se utiliza en la forma

$$l^2 = mka(1 - e^2). \quad (11-50)$$

La ecuación (11-49) se puede entonces poner en la forma

$$\overline{\dot{\omega}} = \frac{6\pi}{\tau(1 - e^2)} \left(\frac{R}{a} \right), \quad (11-51)$$

donde R es el llamado radio gravitatorio del Sol:†

$$R = \frac{GM}{c^2} = 1,4766 \text{ km}. \quad (11-52)$$

* Véase W. M. Smart, *Celestial Mechanics* (New York, Wiley, 1953) p. 243, donde se atribuye a Eddington el reconocimiento del potencial de perturbación equivalente. Referencia más reciente la encontramos en la voluminosa monografía de Misner, Thorne y Wheeler, *Gravitation* (San Francisco, California: Freeman, 1973). El potencial correctivo r^{-3} se puede deducir de la ecuación unidimensional equivalente para la energía que se da en ella en la p. 668, ecuación (25.42), descifrando con cuidado la colección de elaborados símbolos y recordando la casi invisibilidad de c en la mayoría de las expresiones.

† El valor numérico se basa en el sistema 1968 JPL de constantes astronómicas. Véase W. G. Melbourne et al., JPL Technical Report 32-1306, Julio 15, 1968.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Vamos a ilustrar el procedimiento con un ejemplo breve. Consideremos el problema, tratado en § 11-3, del péndulo plano con amplitud de oscilación finita. Según la ecuación (11-33), la hamiltoniana de perturbación puede escribirse en función de J_0 y w_0 en la forma

$$\epsilon H_1 = -\frac{J_0^2}{24\pi^2 ml^2} \sin^4 2\pi w_0 \quad (11-78)$$

(donde l , recordémoslo, aquí sólo es la longitud del péndulo). Convendrá tomar para el parámetro ϵ la pequeña cantidad θ_1^2 (ec. 11-28), que es el cuadrado de la amplitud de oscilación en el caso no perturbado. Como el valor medio de \sin^4 para un periodo es $3/8$, la forma funcional de α_1 será

$$\alpha_1(J) = \bar{H}_1 = \frac{-J^2}{64\pi^2 ml^2 \theta_1^2},$$

y

$$\frac{\nu - \nu_0}{\epsilon} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial J} = -\frac{J}{32\pi^2 ml^2 \theta_1^2}. \quad (11-79)$$

Para calcular $\nu - \nu_0$ hasta un primer orden de ϵ , podemos sustituir J por J_0 . Además, de las ecuaciones (10-76) y (11-28) se deduce que

$$J_0 = \frac{2\pi E}{\omega_0} = \frac{\pi mgl\theta_1^2}{\omega_0} = 2\pi^2 ml^2 \theta_1^2 \nu_0. \quad (11-80)$$

Luego la ecuación (11-79) se reduce simplemente a

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial J} = -\frac{\nu_0}{16},$$

y la variación relativa de ν es

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} \equiv \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{\theta_1^2}{16},$$

resultado concordante con la ecuación (11-39).

Hay ejemplos en los cuales se anula H_1 y la perturbación de primer orden no da un resultado útil. Así, en el llamado oscilador anarmónico, el término de primer orden de la hamiltoniana de perturbación es de la forma ϵq^3 . Pero como $\sin^3 2\pi w_0$ tiene un valor



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

de la perturbación y se pueden tolerar sin introducir nuevos métodos. Existen casos en los que el cociente $C_j/(\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}_0)$ se hace grande, al menos mayor que el orden $\varepsilon^{1/2}$ y en tal caso se habla de *resonancias profundas*. Para tratar éstas hay que idear métodos especiales, particularmente el llamado desarrollo de Bohlin en potencias de $\varepsilon^{1/2}$ en vez de en potencias de ε . Seguir adelante en esto sería penetrar en el campo extenso y de rápido desarrollo que constituyen los fenómenos de resonancia en oscilaciones alineales, cuyo tratamiento adecuado exige una monografía aparte.

11-6 TÉCNICAS DE PERTURBACIÓN ESPECIALIZADAS PARA MECÁNICA CELESTE Y MECÁNICA ESPACIAL

Ya hemos mencionado que la teoría de la perturbación y la Mecánica celeste han evolucionado juntas desde los tiempos de Newton. Se han desarrollado muchos métodos especializados para cubrir las necesidades de la Mecánica celeste. El nacimiento y el rápido crecimiento de la exploración espacial y del moderno ordenador digital (son casi simultáneos) ha vuelto a la vida un tema que se hallaba casi en hibernación al crear nuevos métodos y maneras de contemplar la teoría de la perturbación. No pretendemos estudiar esta larga historia, reciente y antigua, en detalle. Lo que pretendemos es describir tendencias e introducir al lector a la terminología a menudo peculiar que se utiliza en la literatura.

Frecuentemente se distingue entre teorías de perturbación *generales*, que llevan a fórmulas analíticas, y métodos de perturbación *especiales*, que comportan soluciones numéricas de las ecuaciones correspondientes al sistema perturbado. (También existen **métodos mixtos**, por lo que la distinción sólo es aproximada.) Los esquemas de perturbación tratados anteriormente son todos ejemplos de teorías de perturbación **generales**. Todos los intentos primitivos a métodos de perturbación en Mecánica celeste pueden clasificarse como «generales». La primera técnica fue la de la «variación de constantes» que se desarrolló, a la pata coja y con puntos de partida falsos, en el siglo XVIII. Finalmente, Lagrange consiguió dar al método una base firme en 1782 (desde luego, no en la versión canónica que hemos descrito **anteriormente**).

La construcción de métodos de perturbación en Mecánica celeste se vio muy influida por la naturaleza especial de los problemas que había que tratar. Hasta hace poco, todas las fuerzas que se consideraba eran gravitatorias, la mayor parte de las veces entre puntos materiales. El problema lunar, es decir, el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, parecía siempre grande porque las perturbaciones solares son considerablemente mayores que casi toda otra situación astronómica. A lo largo de los siglos, a partir de Newton, se repitieron los ataques al «problema principal» de la teoría lunar. En él, la Tierra y la Luna se tratan como puntos materiales cuyo centro de masa se mueve en torno al Sol siguiendo una elipse de Kepler fija. Incluso con este modelo simplificado, podemos vislumbrar una cierta idea acerca de la complejidad de la situación al considerar la forma de la hamiltoniana de perturbación. Todo lo que entra en ΔH son las componentes de las distancias entre los tres cuerpos. Ahora bien, estas distancias son funciones complicadas de los radios vectores y de los ángulos que forman entre sí, especialmente cuando el movimiento no está confinado en un plano. Usualmente, los términos de ΔH se expresan



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Cuando se deja variar a con el tiempo, (w_0, J_0) siguen siendo, desde luego, variables canónicas válidas, pero la función generatriz será ahora función explícita del tiempo a través de la dependencia temporal de a . Luego, la hamiltoniana apropiada para el sistema (w_0, J) será

$$\begin{aligned} K(w_0, J_0, a) &= H(J_0, a) + \frac{\partial W^*}{\partial t} \\ &= H(J_0, a) + \dot{a} \frac{\partial W^*}{\partial a}. \end{aligned} \quad (11-110)$$

Ahora, J_0 ya no es constante y w_0 no variará linealmente con el tiempo. De hecho, el segundo término de la hamiltoniana es una hamiltoniana de perturbación y al igual que en el método de la variación de constantes, la dependencia temporal de J_0 viene regida por la ecuación de movimiento

$$\dot{J}_0 = -\frac{\partial K}{\partial w_0} = -\dot{a} \frac{\partial}{\partial w_0} \left(\frac{\partial W^*}{\partial a} \right), \quad (11-111)$$

donde, desde luego, la derivada entre paréntesis se expresa, al igual que K , en función de J_0 , w_0 y a . En el espíritu de una teoría de perturbación de primer orden, buscamos un término secular, el valor medio de J_0 a lo largo del periodo del movimiento no perturbado *para la a apropiada*. Como a varía lentamente, podemos considerarla constante durante este intervalo de tiempo y podremos escribir el valor medio en la forma

$$\dot{J}_0 = -\frac{1}{\tau} \int_{\tau} \dot{a} \frac{\partial}{\partial w_0} \left(\frac{\partial W^*}{\partial a} \right) dt = -\frac{\dot{a}}{\tau} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial w_0} \left(\frac{\partial W^*}{\partial a} \right) dt + O(\dot{a}^2, \ddot{a}). \quad (11-112)$$

De la ecuación (10-13') debemos recordar que W está dada por la integral indefinida

$$W = \int p dq.$$

Por tanto, en un periodo de w_0 la función generatriz W aumentará en J_0 . Al propio tiempo, $J_0 w_0$ también aumenta en J_0 , ya que w_0 aumenta en la unidad. Por tanto, según la ecuación (11-109), W^* es función periódica de w_0 y tanto ella como su derivada respecto de a podrán expresarse mediante una serie de Fourier:

$$\frac{\partial W^*}{\partial a} = \sum_k A_k(J_0, a) e^{2\pi i k w_0}. \quad (11-113)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

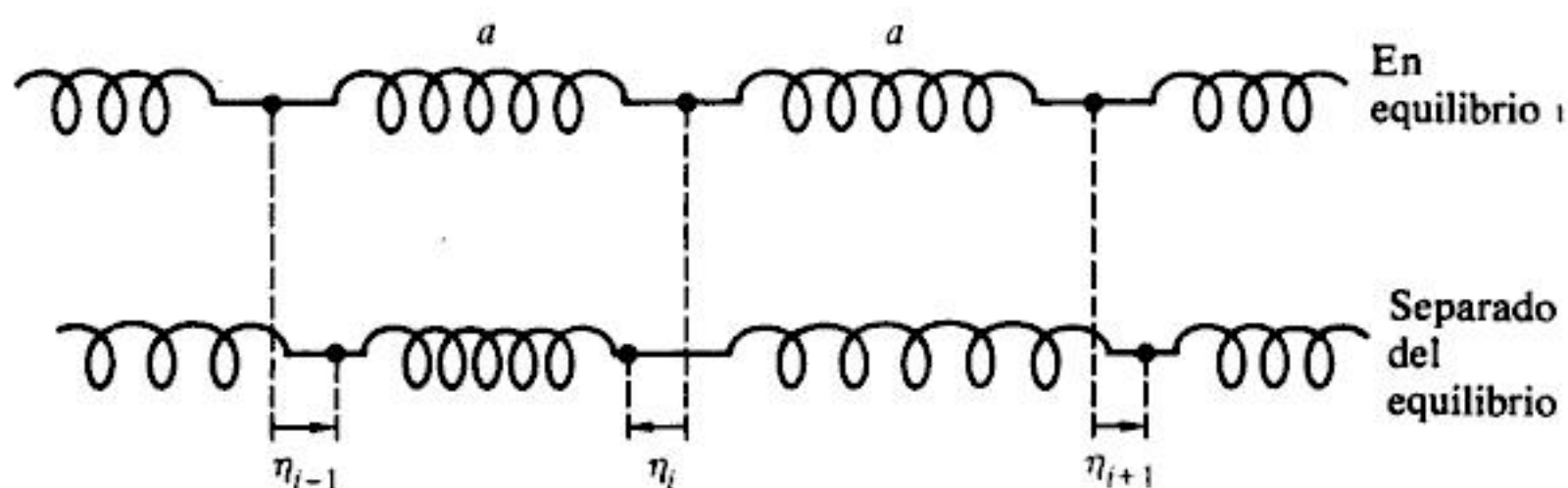


FIGURA 12-1

Sistema discreto de puntos materiales iguales unidos por resortes, como aproximación a una varilla elástica continua.

donde ξ es el alargamiento por unidad de longitud e Y es el módulo de Young. Ahora bien, el alargamiento de una longitud a de un sistema discreto, por unidad de longitud, será $\xi = (\eta_{i+1} - \eta_i)/a$. La fuerza necesaria para estirar el resorte esta cantidad es

$$F = k(\eta_{i+1} - \eta_i) = ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right),$$

por lo que ka debe corresponder al módulo de Young de la varilla continua. Al pasar del caso discreto al continuo, el índice entero i que identifica al punto material particular se convierte en la coordenada de posición continua x ; en vez de la variable η_i tenemos $\eta(x)$. Además, la cantidad

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \frac{\eta(x + a) - \eta(x)}{a}$$

que figura en L_i tiende evidentemente al límite

$$\frac{d\eta}{dx},$$

cuando a , que desempeña el papel de dx , tiende a cero. Por último, la suma extendida a un número discreto de partículas se convierte en una integral extendida a x , la longitud de la varilla, y la lagrangiana (12-4) queda en la forma

$$L = \frac{1}{2} \int \left(\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right) dx. \quad (12-6)$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

lagrangiana apropiada para un campo acústico, la cual podemos escribir en la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mu_0 \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 + 2P_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} - \gamma P_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta})^2). \quad (12-24)$$

Aquí, μ_0 es la densidad másica de equilibrio y P_0 la presión de equilibrio, del gas. El primer término de \mathcal{L} está claro que es una densidad de energía cinética, mientras que los términos restantes representan el cambio que sufre la energía potencial del gas por unidad de volumen a consecuencia del trabajo efectuado sobre el gas o por él en el curso de las contracciones y expansiones que son la marca de las vibraciones acústicas. En la energía potencial nos aparece la constante γ , cociente entre los calores molares a presión y a volumen constantes, la cual entra en juego porque las compresiones y enrarecimientos del gas por las ondas sonoras tienen lugar adiabáticamente y no a temperatura constante. Con la notación cuadridimensional, la densidad de lagrangiana queda en la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mu_0 \eta_{i,0} \eta_{i,0} + 2P_0 \eta_{i,i} - \gamma P_0 \eta_{i,i} \eta_{j,j}). \quad (12-25)$$

El término central de \mathcal{L} es evidente que no contribuye a la ecuación de movimiento porque su derivada parcial respecto a η_{ij} es nula o constante. Por tanto, las ecuaciones de movimiento (ec. 12-23) toman la forma

$$\mu_0 \eta_{j,00} - \gamma P_0 \eta_{i,ij} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (12-26)$$

Volviendo a la notación vectorial, las ecuaciones (12-26) se condensan en la ecuación vectorial única

$$\mu_0 \frac{d^2 \boldsymbol{\eta}}{dt^2} - \gamma P_0 \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} = 0. \quad (12-27)$$

Podemos decir dos cosas acerca de la ecuación de movimiento (ec. 12-26 ó 12-27) y de la densidad de lagrangiana de la cual se ha deducido. Una es que la ecuación (12-27) se puede poner en forma más reconocible utilizando el hecho de que en el caso de vibraciones de pequeña amplitud la variación relativa de la densidad del gas σ está relacionada con $\boldsymbol{\eta}$ mediante la ecuación

$$\sigma = -\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

ecuaciones alineales. Dichas soluciones son perturbaciones en onda progresiva que pueden interactuar entre sí —atravesándose unas a otras— y que emergen sin variar su forma salvo, quizá, una rotación de fase. Tales soluciones se encuentran también, por ejemplo, en el caso de la ecuación alineal de Korteweg-deVries,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0, \quad (12-115)$$

donde α y ν son constantes. Estas ondas solitarias que conservan su forma incluso a través de interacciones se han denominado «solitones» y están encontrando un campo de aplicación cada vez mayor en toda la Física, desde la de partículas elementales a la Física del estado sólido. Por ejemplo, la ecuación del péndulo de seno-Gordon se ha utilizado para describir familias de partículas elementales y también aparece en relación con la teoría de la unión de Josephson.

C. Campo clásico de una partícula de Dirac. Aquí, el campo consiste en cuatro cantidades escalares complejas que aparecen en dos ordenaciones, ψ y ψ^\dagger . Para nuestros fines, podemos considerar que ψ es una matriz columna de cuatro elementos y que ψ^\dagger es la matriz adjunta. Densidad de lagrangiana adecuada es

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \gamma_\mu \psi_{,\mu} + m\psi^\dagger \psi. \quad (12-116)$$

Aquí m es una constante igual a la masa de la partícula que se representa (en ciertas unidades) y γ_μ es un conjunto de cuatro matrices de Dirac 4×4 que son generalizaciones de las matrices 2×2 de Pauli σ_i , utilizadas en el capítulo 4 (cfr. ec. 4-74).^{*} El campo tendrá, pues, ocho componentes, cuatro para ψ y cuatro para ψ^\dagger . Si ψ_λ representa un elemento de ψ^\dagger , la \mathcal{L} de la ecuación (12-116) podría escribirse en forma desarrollada así:

$$\mathcal{L} = i\psi_\nu^\dagger (\gamma_\mu)_{\nu\lambda} \psi_{\lambda,\mu} + m\psi_\nu^\dagger \psi_\nu.$$

Aquí, $(\gamma_\mu)_{\nu\lambda}$ es el elemento $\nu\lambda$ de γ_μ . Sin embargo, es mucho más conveniente e igualmente concreto conservar siempre la notación matricial para ψ y ψ^\dagger .

^{*} Representadas en forma de matrices 2×2 , las matrices de Dirac se pueden definir en la forma

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Las representaciones explícitas no son necesarias para ilustrar ψ, ψ^\dagger como ejemplo de campo clásico.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

idénticamente. Luego, para la condición de Lorentz, la densidad de lagrangiana es equivalente a

$$\mathcal{L}' = -\frac{A_{\mu,v}A_{\mu,v}}{8\pi} + \frac{j_{\mu}A_{\mu}}{c}. \quad (12-131)$$

Para esta densidad de lagrangiana, los términos que entran en las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_{\mu,v}} = -\frac{A_{\mu,v}}{4\pi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A_{\mu}} = \frac{j_{\mu}}{c}.$$

Luego, la ecuación (12-131) implica las ecuaciones de campo

$$\square^2 A_{\mu} + \frac{4\pi j_{\mu}}{c} = 0,$$

que son las conocidas ecuaciones de onda para el cuadripotencial vector (ec. 7-81) cuando se utiliza la condición de Lorentz.

Por último, ya hemos hecho notar que la \mathcal{L} para un campo electromagnético (ec. 12-131) consta de una densidad de lagrangiana para campo libre más un término que describe la interacción de una densidad de carga y de una densidad de corriente continuas con el campo. Resulta tentador ver hasta dónde podemos llegar en el intento de introducir interacciones campo-partícula, localizando la carga en un punto. Haremos esto considerando la situación física en un determinado sistema de Lorentz, es decir, vista por un observador particular. Con ello se abandona la covarianza manifiesta, pero el resultado sigue conforme con la Relatividad restringida ya que se deriva de una teoría claramente relativista. La densidad de corriente constituye una medida del movimiento de las cargas y en un sistema dado cualquiera, \mathbf{j} está definida en función de la densidad de carga ρ mediante la relación

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Aquí, \mathbf{v} es el «campo» de velocidades de la distribución continua de cargas. La localización podemos realizarla con ayuda de la conocida función δ de Dirac. En forma tridimensional, la función δ tiene la propiedad de que si es $f(\mathbf{r})$ una función cualquiera del espacio, se cumple que

$$\int dV f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)) = f(\mathbf{s}),$$



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- a** matriz columna (o fila) correspondiente al vector propio **a** de oscilaciones pequeñas, [332](#).
- a** vector traslación del origen en la transformación de Poincaré, 350.
- a** matriz columna (o fila) de coeficientes de velocidades en la lagrangiana, 423.
- a, b, c** matrices $2s \times 2s$ en la forma linealizada de la routhiana, [435](#).
- B** inducción magnética, 27.
- B** matriz rotación correspondiente al ángulo de Euler, ψ , 186.
- C_j capacidad, 64.
- C, C_k factores de escala en oscilaciones pequeñas, 309, 317.
- C_{ijk} constantes de estructura, 512.
- C_j coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de [H](#), 633.
- C** vector de Laplace-Runge-Lenz, normalizado para movimiento no acotado, 514.
- C** matriz columna (o fila) de C_k , 309.
- C** matriz rotación correspondiente al ángulo de Euler, θ , 186.
- C celeridad de la luz, 27, 345.
- c_{ij} constantes de ligadura del cuerpo rígido, 15.
- c_j $2n$ funciones de las variables canónicas α_i, β_i que son (las funciones) independientes entre sí, 612.
- c_p constantes de transformación de medida de primera especie, 719.
- D** densidad en el espacio fásico, 518.
- D** desplazamiento eléctrico, [26](#).
- D** cantidad conservativa, monopolo magnético, 157.
- D** vector de Laplace-Runge-Lenz normalizado, movimiento acotado, 513.
- D** matriz rotación correspondiente al ángulo de Euler ϕ , 186.
- E energía total del sistema, 76, 90.
- E_j fuerza electromotriz, 52.
- E' energía total constante, problema unidimensional equivalente de la peonza simétrica pesada, 273-274.
- E** intensidad del campo eléctrico, 27.
- \mathcal{E} energía cinética relativista en unidades de mc^2 , [388](#).
- e excentricidad, 117, 119, [120](#).
- e carga del electrón, [136](#).
- e_0, e_1, e_2, e_3 parámetros de Euler, [196](#).
- e** vector de componentes e_1, e_2, e_3 , 210.
- $F(q, t)$, función diferenciable arbitraria, [25](#).
- F anomalía de excentricidad, movimiento hiperbólico, [156](#).
- F, F_1, F_2, F_3, F_4 funciones generatrices, 463, 465s.
- F_j fuerza excitadora en oscilaciones pequeñas, [328](#), 333.
- F_μ, F^μ componentes de un vector covariante y contravariante, respectivamente, 358.
- $F_{\mu\nu}, \mathbf{F}$ tensor campo electromagnético, 704.
- F** fuerza, [2](#).



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

- p vector de cantidades de movimiento conjugadas de las coordenadas cartesianas de una partícula (§ 7-9 solamente), 407.
- Q_j fuerza generalizada, [22](#).
- Q energía de reacción, 147.
- Q_i, P_i variables canónicas transformadas, 463.
- \mathbf{Q} matriz 2×2 unitaria asociada a la matriz de rotación, 189.
- \mathbf{Q} matriz 2×2 unimodular asociada a la transformación de Lorentz, 362.
- $\mathbf{Q}_\theta, \mathbf{Q}_\phi, \mathbf{Q}_\psi$ matrices 2×2 unidades asociadas a las rotaciones de los ángulos de Euler, 197.
- q carga, 27.
- q_j coordenada generalizada, [16](#).
- q_0 amplitud de referencia, oscilador armónico perturbado, 636.
- q_k coeficientes del desarrollo de la cantidad campo en el espacio de las cantidades de movimiento, 688.
- q, p constantes en problemas de la peonza simétrica pesada, 277.
- $\delta q, \delta p, \delta \eta_i$ variaciones infinitesimales de variables canónicas, 481.
- \mathbf{q} matriz columna (o fila) de coordenadas generalizadas, 424.
- R radio de la Tierra, [292](#).
- R routhiana, 432.
- R función perturbadora, 613.
- R radio gravitatorio del Sol, [620](#).
- R_0 radio de giro, 258.
- R_j resistencia, 64.
- R_j coordenadas espaciales del centro de energía relativista, 393.
- R_μ cantidades integrales conservativas, 673.
- \mathbf{R} vector de posición, centro de masa, 7.
- \mathbf{R}, \mathbf{R} vector propio (y su matriz columna o fila), 203.
- \mathbf{R} parte de la rotación espacial de la matriz de la transformación de Lorentz, 350.
- r número de coordenadas cíclicas en el método de Routh, 432.
- r_0 radio de órbita circular, [112](#).
- r, s, t subíndices que se refieren a partículas, 381.
- \mathbf{r} vector de posición, 1.
- S impulso de una fuerza generalizada, 80.
- S función principal de Hamilton, [535](#).
- S_1, S_2, S_3 constantes del movimiento, oscilador armónico bidimensional, 516.
- dS_ν elemento de superficie en un cuadriespacio, 694.
- \mathbf{S} matriz inversión, 183.
- \mathbf{S} matriz 2×2 compleja de coordenadas en un cuadriespacio real, 362.
- s número de coordenadas no cíclicas en el método de Routh, 432.
- s parámetro de impacto, 134.
- s, ds longitud de un arco o camino, y diferencial de la, [4](#).
- s_j coordenadas generalizadas, 40.
- T energía cinética, [4](#).

ISBN 84-291-4306-8



9 788429 143065